classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES
Décembre 2025

Feuille d'Exercices $n°8$
Suites et séries de fonctions

Exercice 1. (CCINP 24) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\begin{array}{cccc} f_n & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(nx)e^{-n^2x^2} \end{array}$$

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[\alpha, 1]$ où $\alpha \in]0,1[$ puis sur $[0,1]$.

Exercice 2.
1. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ où $f_n : x \mapsto e^{\frac{ix}{n}}$.
   (a) Étudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$, puis sur tout segment $[-a,a] (a > 0)$ de $\mathbb{R}$
2. On pose pour $n \geq 1$:

$$\begin{array}{cccc} f_n : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2x + 2n & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases} \end{array}$$

   (a) Tracer f_1, f_2, f_3.
   (b) Étudier la convergence simple de $(f_n)_n$.
   (c) Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$.

Exercice 3. (CCINP 24) On définit une suite $(u_n)_n$ de fonctions sur $[0,1]$ par : $u_0(x) = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leq |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. En déduire que $(u_n)_n$ converge simplement vers une fonction u non identiquement nulle
3. Démontrer la convergence uniforme de $(u_n)_n$ sur $[0,1]$
4. Montrer que u est solution de $u'(x) = u(x - x^2)$.

Exercice 4. On considère $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-x\sqrt{n}}$

1. Donner le domaine de définition de S.
2. Montrer que S est C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
3. Dresser son tableau de variations.
4. Retrouver le signe de S par une propriété sur les séries alternées.

Exercice 5. Pour $x \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2x}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. On note S sa somme.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xS(x)$ et en déduire un équivalent simple de S en $+\infty$.

Exercice 6. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Donner le domaine de définition de f. On le note D
2. Prouver que f est continue sur D

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent simple de f en 0^+.

Exercice 7. Navale 2019 Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. .

1. Montrer que S est définie et continue sur $]0, +\infty$.
2. Limite de S en $+\infty$?
3. Limite de S en 0^+ , puis équivalent.

Exercice 8. 1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} 2nxe^{-nx^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et normalement sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

On note $S(x)$ sa somme

2. Soit$I_n = \int_x^{+\infty} 2nte^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$
   (a) Justifier l'existence de I_n et la calculer.
   (b) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} I_n(x)$. Est-ce une primitive de S ?
   (c) En déduire $S(x)$.

Exercice 9. 1. (a) Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$

   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

2. En calculant de deux façons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x$, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}$.

Exercice 10. (CCINP 2016)

1. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$.
2. Justifier l' existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{t}{n}}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
3. Donner un équivalent de I_n

Exercice 11. (CCINP 2022) Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ une série complexe absolument convergente.

1. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ où $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Pour x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Exercice 12. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$ des suites suivantes :

1. $\displaystyle\left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t\right)_{n\geq 2}$.
2. $\displaystyle\left(\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geq 0}$ où f est une fonction continue sur $[0, 1]$.

Exercice 13. (Centrale 2022)
Soit $I = [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |z| < 1$.

1. Justifier que $t \mapsto |z - e^{it}|$ ne s'annule pas sur I et que $f : t \mapsto \frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}$ est continue sur I.
2. (a) Montrer que $u : t \mapsto 1, v : t \mapsto e^{it}$ et $w : t \mapsto e^{-it}$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.

(b) Montrer l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et les expliciter tels que :

$$\forall t \in I, f(t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - ze^{-it}} + \frac{\beta}{1 - \bar{z}e^{-it}}$$

3. Calculer $\frac{1}{2\pi} \int_I f(t)\, \mathrm{d}t$.

Exercice 14. (Mines-Pont 2019) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha + x^\alpha}$

1. Pour quelles valeurs de α la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$?
2. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}^+$?
   Convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
   Convergence uniforme sur certaines parties de $\mathbb{R}^+$?
3. Pour quelles valeurs de α la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$?