PCSI Mathématiques - Devoir Surveillé 1 14/9/2019

2 heures

- Le sujet est (volontairement) long, commencez par le lire en entier et à vous faire une idée des parties que vous voulez aborder en priorité.
- Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix, cependant ils doivent apparaitre sur votre copie en un seul bloc (il est conseillé de commencer chaque exercice sur une nouvelle page).
- Soignez la rédaction et la présentation de vos réponses, en particulier on veillera à **encadrer les résultats**.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées pour ce devoir.

Exercice n° 1

Soit un ensemble à trois éléments, $E = \{a; b; c\}$, ainsi que l'application $f : E \to E$ définie par :

$$f(a) = c\ , \quad f(b) = c \quad \text{et} \quad f(c) = b.$$

a) f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

b) Déterminer $f \circ f(a)$.

Exercice n° 2

Soit la fonction $f(x) = |x + 2| - |7 - x|$. Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice n° 3

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x - 3}{4 + x - x^2}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer le tableau de signes de $f(x)$.
3. Soit $g = \ln \circ f$. Quel est le domaine de définition de g ?
4. Soit $\mathcal{C}_g$, la courbe représentative de g. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec les axes du repère (si ces points existent).

Exercice n° 4

Soit n et p des entiers naturels non nuls et f la fonction définie pour tout $x \in [0; 1]$ par $f(x) = x^n(1 - x)^p$. Déterminer les extremas de f.

Exercice n° 5

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $5^n \geq 4^n + 3^n$.

Exercice n° 6

Fonctions cosinus hyperbolique (ch), sinus hyperbolique (sh) et tangente hyperbolique (th)

On considère deux fonctions, notées ch et sh, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad \text{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$

1. Etudier la parité de ch et sh. En déduire le domaine d'étude de ces fonctions.
2. Justifier la dérivabilité de ch et sh puis exprimer leurs dérivées en fonction de ch et sh.
3. Faire l'étude de la fonction sh (variations et limites).
4. Faire l'étude de la fonction ch (variations et limites).
5. On note ch^2 le produit ch $\times$ ch et sh^2 le produit sh $\times$ sh. Montrer la propriété :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$$
6. On considère la fonction, notées th définie par $\text{th} = \dfrac{\text{sh}}{\text{ch}}$. En faire l'étude complète.