PCSI, Mathématiques - Corrigé du DS 1, proposé le 14/9/2019

Exercice n° 1

a) $\underline{f \text{ n'est pas injective}}$ car c a deux antécédents par f : a et b.
$\underline{f \text{ n'est pas surjective}}$ car a n'est pas atteint par f.

b) On a : $a \xmapsto{f} c \xmapsto{f} b$. Autrement dit : $\boxed{f \circ f(a) = b}$.

Exercice n° 2

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \iff |x+2| = |7-x|$. Chaque valeur absolue s'intreprète comme une distance et le problème revient à placer sur la droite réelle un point qui soit équidistant de -2 et 7. $\boxed{\text{L'unique solution est } \frac{5}{2}}$.

Exercice n° 3

1. $f(x)$ existe si, et seulement si $4 + x - x^2 \neq 0$. Après calculs, les racines de ce polynôme du second degré sont $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$. Il suit que $\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est } \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{1-\sqrt{17}}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\}}$.
2. Le signe de $f(x)$ dépend de celui de la fonction affine $x \mapsto x-3$ et de celui du polynôme du second degré étudié à la question précédente. On a : $\frac{1-\sqrt{17}}{2} < \frac{1+\sqrt{17}}{2} < 3$, ce qui permet d'établir le tableau de signes.

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$		3		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

3. $g(x) = \ln \circ f(x)$ existe si, et seulement si, $f(x) > 0$. On déduit du tableau précédent que :
$\boxed{\text{le domaine de définition de } g \text{ est }]-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}[\cup]\frac{1+\sqrt{17}}{2}; 3[}$.
4. 0 n'est pas dans $\mathcal{D}_g$ donc $\mathcal{C}_g$ ne coupe pas l'axe des ordonnées. Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec l'axes des abscisses sont les solutions de $g(x) = 0$. On a :

$$\forall x \in \mathcal{D}_g,\ g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$$

Ces deux valeurs sont bien dans $\mathcal{D}_g$. *(Il n'est pas évident que* $\sqrt{7} \in]\frac{1+\sqrt{17}}{2}; 3[$*. Ces nombres étant positifs, on peut comparer leurs carrés pour les ordonner).*

$\boxed{\text{Finalement, les points d'intersection de } \mathcal{C}_g \text{ avec les axes du repère sont } (-\sqrt{7}; 0) \text{ et } (\sqrt{7}; 0).}$

Exercice n° 4

La fonction f est polynômiale, elle est donc définie et dérivable sur $[0; 1]$. On a :

$$\forall x \in [0;1],\ f'(x) = nx^{n-1}(1-x)^p - px^n(1-x)^{p-1} = x^{n-1}(1-x)^{p-1}(n - (n+p)x)$$

Pour tout réel x dans $[0;1]$, $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$ donc $x^{n-1}(1-x)^{p-1} \geq 0$ et il suit que $f'(x)$ a le même signe que $n - (n+p)x$, qui est une fonction affine décroissante. On déduit le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{n}{n+p}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\frac{n}{n+p})$	$\searrow$	0

$\boxed{\text{On déduit que } f \text{ admet pour minimum 0 et pour maximum } f(\frac{n}{n+p}) = \frac{n^n p^p}{(n+p)^{n+p}}}$ (après calculs).

Exercice n° 5

Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ que $5^n \geq 4^n + 3^n$.

- **Initialisation pour** $n = 2$:
  D'une part, $5^n = 5^2 = 25$ et d'autre part $4^n + 3^n = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$. Ces deux nombres sont égaux, on a donc bien $5^n \geq 4^n + 3^n$ pour $n = 2$.
- **Hérédité** :
  Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie, c'est-à-dire tel que $5^n \geq 4^n + 3^n$.
  Montrons que la propriété est alors aussi vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$.

  On a : $5^n \geq 4^n + 3^n \iff 5^{n+1} \geq 5 \times 4^n + 5 \times 3^n$: ($\clubsuit$).

  Or, $5 \times 4^n > 4 \times 4^n$ et $5 \times 3^n > 3 \times 3^n$ donc, avec ($\clubsuit$) on obtient :

  $$5^{n+1} \geq 4 \times 4^n + 3 \times 3^n \iff 5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}.$$

  Finalement, la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion** :
  La propriété a été initialisée pour $n = 2$, elle est héréditaire et donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$.

Exercice n° 6

Fonctions cosinus hyperbolique (ch), sinus hyperbolique (sh) et tangente hyperbolique (th)

Ces fonctions font partie des nouvelles fonctions de référence, il est donc important de traiter cet exercice en entier et de bien le comprendre. En fin d'exercice vous trouverez les courbes représentatives de ces courbes.

1. ch et sh sont bien définies sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$ et $\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$. On en déduit que $\boxed{\text{ch est paire et sh est impaire}}$.
   Il suit qu'il suffit de les étudier sur $\mathbb{R}^+$ *(on pourrait tout aussi bien choisir $\mathbb{R}^-$).*
2. ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaisons linéaires (et composées) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. En appliquant les formules de dérivation on obtient : $\boxed{\text{ch}' = \text{sh et sh}' = \text{ch}}$.
   (La seule difficulté est de bien dériver e^{-x}).
3. On a $\text{sh}' = \text{ch}$ et il est clair que $\text{ch} > 0$ *(voyez-vous bien pourquoi ?)* donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   La parité de sh nous permet de limiter son étude à $\mathbb{R}^+$ et on a uniquement la limite en $+\infty$ à déterminer. *(Voyez-vous pourquoi, sans calcul, on peut affirmer que sh $(0) = 0$?)* On a :

   $$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

   On en déduit, par opérations sur les limites, que $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \text{sh}(x) = +\infty}$ On dresse le tableau de variations de sh sur $\mathbb{R}^+$ et on le complète à $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
sh	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

4. On a $\text{ch}' = \text{sh}$. Or, le tableau de variations de sh obtenu à la question précédente nous donne son signe.

   On a $\boxed{\text{ch}(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \text{ch}(x) = +\infty}$ ce qui nous permet de construire le tableau de variations de ch sur $\mathbb{R}^+$ puis de le compléter à $\mathbb{R}$ (par parité) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sh		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = (\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^0 = 1$.

6. D'après la question précédente, ch ne s'annule jamais. Il suit que $\mathrm{th}(x)$ existe pour tout réel x. De plus, ch et sh étant dérivables, on déduit que <u>la fonction th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$</u>.
ch est paire et sh est impaire, on en déduit que <u>la fonction th est impaire</u>. *(Voyez-vous bien pourquoi ?)*
On a :
$$\mathrm{th}' = \frac{\mathrm{sh}'\mathrm{ch} - \mathrm{sh}\mathrm{ch}'}{\mathrm{ch}^2} = \frac{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2} > 0.$$
On en déduit que <u>la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$</u>. On calcule la limite en $+\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = 1.$$
(Quelle opération a-t-on fait ? Pourquoi a-t-on eu besoin de le faire ? Voyez-vous bien pourquoi le résultat est 1 ?).
On peut contruire le tableau de variations de th (d'abord sur $\mathbb{R}^+$ puis complété par imparité) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
th	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1