Topologie, Limite, Continuité dans les espaces vectoriels normés
L'essentiel à retenir

1. Topologie d'un espace vectoriel de dimension finie
Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel normé et on note $\|.\|_E$ une norme sur E.
1.1 Parties ouvertes- Parties fermées de E
Définition 1. 1. On dit qu'une partie O de E est *ouverte* lorsque :

$$\forall a \in O,\ \exists r > 0, B(a,r) \subset O$$

On dit aussi que O est un ouvert de E

2. On dit qu'une partie F de E est *fermée* lorsque son complémentaire dans E, C_E^F, est une partie ouverte de E.*On dit aussi que F est un fermé de E*

Propriété 1. 1. (a) Une réunion de parties ouvertes est une partie ouverte.
   (b) Une intersection **finie** de parties ouvertes est une partie ouverte.
2. (a) Une intersection de parties fermées est une partie fermées.
   (b) Une réunion **finie** de parties fermées est une partie fermée.

Caractérisation d'une partie fermée en utilisant les suites :
Théorème 1. *Caractérisation séquentielle d'une partie fermée*
Soit $F \subset E$.
F est une partie fermée si et seulement la limite de toute suite d'éléments de F convergente est un élément de F.

Applications :
1. Tout espace vectoriel normé E est à la fois un fermé et un ouvert de E donc $\emptyset$ aussi.
2. $\mathbb{Q}$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.
3. $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$ et donc $\mathbb{Q}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
4. Tout singleton est un fermé.
5. Toute boule fermée est un fermé.
6. Toute boule ouverte est un ouvert.
7. Tout intervalle du type $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
8. Tout intervalle du type $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
9. Tout intervalle du type $]a,b]$, $[a,b[$ est ni fermé, ni ouvert de $\mathbb{R}$.

1.2 Point adhérent à une partie de E
Définition 2. Soit A une partie de E et $a \in E$.
On dit que a est *un point adhérent à A* lorsque toute boule de centre a rencontre A.
Autrement dit aussi :

$$\forall r > 0, B(a,r) \cap A \neq \emptyset$$

Notation : On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A et cet ensemble est appelé **adhérence de** A.
Remarque 1. $A \subset \overline{A}$

Théorème 2. Caractérisation séquentielle d'un point adhérent
a est un point adhérent à A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.
En d'autres termes, $\overline{A}$ est l'ensemble des limites de toutes les suites d'éléments de A convergentes.

Définition 3. Soit $A \subset E$.
On dit que A est *dense* (ou *une partie dense* dans E lorsque $E = \overline{A}$
Ce qui revient à dire que, pour tout $x \in E$, il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers x.
1.3 Point intérieur à une partie de E
Définition 4. Soit A une partie de E et $a \in E$.
On dit que a est *un point intérieur à A* lorsqu'il existe une boule de centre a incluse dans A.
Autrement dit aussi :

$$\exists r > 0, B(a,r) \subset A$$

Notation : On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A et cet ensemble est appelé **l'intérieur de** A.

Remarque 2. $\overset{\circ}{A} \subset A$

Théorème 3. Caractérisation séquentielle d'un point intérieur
a est un point intérieur à A si et seulement si toute suite d'éléments de E, qui converge vers a, a ses éléments dans A à partir d'un certain rang.

1.4 Point frontière à une partie de E

Définition 5. Soit A une partie de E et $a \in E$.

On dit que a est *un point frontière à A* lorsqu'il est adhérent, mais pas intérieur à A.

Notation : On note $Fr(A)$ l'ensemble des points frontières à A .

Par définition, $Fr(A)= \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

2. Limites

Dans ce paragraphe, E et F désignent des $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.

On pose $\dim E = p$ et $\dim F = q$.

On se donne $\|.\|_E$ (resp : $\|.\|_F$) normes sur E (resp : F).

2.1 Définition

Définition 6. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $f : A \longrightarrow F$,$a \in \overline{A}$.

On dit que f admet une limite en a lorsque :

$$\exists b \in F, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon$$

Cas particuliers :

1. $E = \mathbb{R}$:
   (a) Si A admet $+\infty$ comme extrémité, on peut définir la limite de f en $+\infty$.
   On dit que f admet une limite en $+\infty$ si :
   $$\exists b \in F, \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0,\ \forall x \in A,\ x \geq M \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon$$
   (b) Si A admet $-\infty$ comme extrémité, on peut définir la limite de f en $-\infty$.
   On dit que f admet une limite en $-\infty$ si :
   $$\exists b \in F, \forall \varepsilon > 0, \exists B < 0,\ \forall x \in I,\ x \leq B \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon$$
2. $F = \mathbb{R}$: on peut définir une limite infinie
   On dit que f *admet $+\infty$ (resp : $-\infty$) pour limite en a* si :
   $$\forall M > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow f(x) \geq M$$
   $$(\text{ resp} : \forall B < 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow f(x) \leq B)$$

Propriété 2. *Unicité de la limite si elle existe*

1. Si f admet une limite en a, alors elle est unique. C'est pourquoi, on la note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{a} f$
2. Si f admet une limite non infinie, alors il existe $r > 0$ tel quie f soit bornée sur $B(a, r) \cap A$, c'est-à-dire
   $$\exists r > 0, \exists M > 0, \forall x \in B(a, r) \cap A, \|f(x)\|_F \leq M$$

2.2 Caractérisation séquentielle de la limite

Propriété 3. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $f : A \longrightarrow F$,$a \in \overline{A}$.

Pour que f admette l pour limite en a, il faut et il suffit que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Corollaire : Si il existe deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergentes vers a et telles que les suites images $(f(u_n))_n$ et $(f(v_n))_n$ n'ont pas la même nature, alors f n'admet pas de limite en a.

2.3 Limite et applications coordonnées

Soit $f : A \to F$ et $B_F = (\varepsilon_i)_{i\in\{1..q\}}$ une base de F.

Pour chaque $x \in A$, $f(x) \in F$ donc se décompose suivant les vecteurs de B_F :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} f_i(x)\varepsilon_i$$

où $f_i(x) \in \mathbb{K}$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $f(x)$ dans B_F.

On définit ainsi q applications : $\forall i \in \{1..q\}, f_i : A \to \mathbb{K}, x \longmapsto f_i(x)$.

Définition 7. Pour tout $i \in \{1..q\}$, on appelle f_i la $i^{\text{ème}}$ application coordonnée de f dans la base B_F.

Propriété 4. f admet une limite en a si et seulement si Pour tout $i \in \{1..q\}$, f_i admet une limite en a et dans ce cas, on a

$$\lim_{a} f = \sum_{i=1}^{q} \left(\lim_{a} f_i \right) \varepsilon_i$$

2.4 Opérations algébriques

Propriété 5. 1. L'ensemble des applications de A dans F admettant une limite en $a \in \overline{A}$ est un $\mathbb{K}$-e.v et $f \longmapsto \lim\limits_{a} f$ est une application linéaire.

2. $\lim\limits_{a} f = l \Longrightarrow \lim\limits_{x \to a} \|f(x)\|_F = \|l\|_F$.
3. $\lim\limits_{a} f = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \|f(x) - l\|_F = 0$.
4. Soit $f : A \to B, g : B \to F, a \in \overline{A}$. On suppose $\lim\limits_{a} f = b$ et $\lim\limits_{b} g = l$.

   Alors $\lim\limits_{a} g \circ f = l$

3. Continuité

Dans ce paragraphe, E et F désignent des $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.

3.1 Continuité en un point

Propriété 6. Soit $f : A \to F$ et $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$.

Si $\lim\limits_{a} f$ existe, alors $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

Remarque : Il se peut que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A/\{a\}}} f(x)$ existe et soit différente de $f(a)$, alors $\lim\limits_{a} f$ n'existe pas.

Définition 8. Soit $f : A \to F$ et $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$.

On dit que f est continue en a lorsque

$\lim\limits_{a} f$ existe (et alors par propriété, on sait qu'elle vaut $f(a)$)

ou alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A/\{a\}}} f(x) = f(a)$

Définition 9. *Prolongement par continuité*

Soit $f : A \to F$ et $\mathbf{a} \in \overline{\mathbf{A}}/\mathbf{A}$.

On suppose que $\lim\limits_{a} f$ existe.

Alors

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} A \cup \{a\} & \to & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ \lim\limits_{a} f & \text{si} \quad x = a \end{cases} \end{array}$$

est continue en a et s'appelle *le prolongement par continuité de f en a.*

Des propriétés sur les limites, on en déduit :

1. *Caractérisation séquentielle de la continuité* :

   f est continue en a si et seulement si l'image $(f(u_n))_n$ de toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de A, convergente vers a, converge vers $f(a)$

2. *Propriétés algébriques* :

   a. Soient f et g continues en a, alors ,

      pour tous scalaires λ, μ, $\lambda f + \mu g$ est continue en a.

   b. Dans le cas où F est une algèbre :

      Soient f et g continues en a, alors $f \cdot g$ est continue en a.

   c. Dans le cas où $F = \mathbb{K}$:

      Soient f et g continues en a avec $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

   d. Soit f continue en a et g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

   e. f continue en a si et seulement si toutes ses applications coordonnées sont continues en a.

   f. Si f est continue en a, alors pour tout $i \in \{1...p\}$, sa i^{ime} application partielle est continue en a_i, mais la réciproque est fausse.

3.2 Continuité sur une partie

Définition 10. f est continue sur A (on dit aussi de classe C^0 sur A) lorsque f est continue en tout point de A.

Notations : $C(A, F)$ ou $C^0(A, F)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur A à valeurs dans F.

Propriété 7. 1. $C(A, F)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

2. La composée (quand elle existe) d'applications continues est continue.
3. Si $B \subset A$ et f est continue sur A, alors sa restriction à B est continue sur B.

3.3 Des propriétés propres aux fonctions continues à valeurs réelles

Propriété 8. Soit f une application continue de E dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Alors,
$\{x \in E/f(x) = \alpha\}, \{x \in E/f(x) \leq \alpha\}, \{x \in E/f(x) \geq \alpha\}$ sont des parties fermées de E.
$\{x \in E/f(x) < \alpha\}, \{x \in E/f(x) > \alpha\}$ sont des parties ouvertes de E.

Théorème 4. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ **continue** sur A et A une partie **fermée et bornée** de E.
Alors f est bornée sur A et atteint ses bornes, c'est-à-dire :

$$\exists a_0 \in A, \operatorname*{Sup}_{x\in A} f(x) = f(a_0)$$

et

$$\exists a_1 \in A, \operatorname*{Inf}_{x\in A} f(x) = f(a_1)$$

Remarque 3. Ce résultat généralise celui de sup : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

3.4 Des applications continues à connaître

3.4.1 Applicationns Lipschitziennes

Définition 11. Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et A une partie de E.
On se donne une application f de A dans F.
On dit que f est *une application lipschitzienne sur* A lorsque

$$\exists k \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x, y) \in A \times A, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$$

k est apppelé *une constante de Lipschitz de* f : elle n'est pas unique.
On dit aussi que f est k-lipschitzienne sur A.

Propriété 9. Toute application lipschitzienne sur A est continue sur A.

3.4.2 Applications linéaires

Théorème 5. Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux evn et $u \in \mathcal{L}(E, F)$,
Si il existe $k > 0$ tel que :$\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$, alors u est continue sur E

Théorème 6. Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux evn **de dimension finie** et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors u est continue sur E.

Remarque 4. On en déduit que, pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers 0, $(u(x_n))_n$ converge vers 0.

3.4.3 Applications multilinéaires

Définition 12. On considère $(E_1, \cdots, E_p)$ et F, $p + 1$ $\mathbb{K}$ espace vectoriel normés.
Soit $f : \prod_{i=1}^{p} E_i \to F$.
On dit que f est p *linéaire*, lorsque :
$\forall (a_1, a_2, \cdots, a_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i, \forall j \in [1..p]$,

$f_{j,(a_1,a_2,\cdots,a_p)} : x \longmapsto f(a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \cdots, a_p)$ est linéaire de E_j dans F.

Théorème 7. Lorsque tous les espaces E_i précédents sont de dimension finie, toute application multilinéaire est continue sur $\prod_{i=1}^{p} E_i$.

3.4.4 Applications polynomiales

Définition 13. Soient, $p \in \mathbb{N}^*$, E, F deux $\mathbb{K}$-e.v de normés de dimensions finies, et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E.

- Une fonction $f : A \subset \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ est dite **polynomiale** si elle est combinaison linéaire des fonctions monomiales de la forme $(x_1, \cdots, x_p) \longmapsto x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2}\, \cdots\, x_p^{\alpha_p}$ où $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$.
- Une fonction $f : A \subset \mathbb{K}^p \to F$ est dite **polynomiale** si chacune de ses fonctions coordonnées est polynomiale.
- Une fonction $f : A \subset E \to F$ est dite **polynomiale en les coordonnées** dans la base $\mathcal{B}$ si chacune de ses fonctions coordonnées est combinaison linéaire des fonctions monomiales de la forme $x = \sum_{i=1}^{p} x_i\, e_i \longmapsto x_1^{\alpha_1}\, x_2^{\alpha_2}\, \cdots\, x_p^{\alpha_p}$ où $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$.

Propriété 10. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-e.v de normés de dimensions finies, et $\mathcal{B}$ une base de E.
Toute fonction f de E dans F, polynomiale en les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est continue.

Un exemple très important : la fonction déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$