Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Ch. I : Intégrales généralisées

— rappels : intégrale d'une fonction continue sur un segment et sommes de Riemann :
$\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{b-a}{N}f\left(a+\frac{k}{N}(b-a)\right)}$

— théorème fondamental du calcul intégral : Si $f\in\mathcal{C}^1(I,F)$, alors pour tout $(a,x)\in I^2$, $\boxed{f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t}$

— Fonctions continues par morceaux, généralisation à ces fonctions de la notion d'intégrale sur un segment.

— **Convergence** ou divergence d'une intégrale généralisée sur un intervalle réel I (borné ou non).

— **Nature des intégrales de fonctions usuelles :**
$\boxed{\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \alpha>1}$, $\boxed{\int_0^1 t^{-\gamma}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \gamma<1}$, $\boxed{\int_{[0,+\infty[} e^{-\beta t}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \beta>0}$, $\boxed{\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t \text{ CV}}$. **[preuves]**

— **Critère de convergence pour l'intégrale d'une fonction positive** continue (ou continue par morceaux) sur $[a,+\infty[$:
$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ CV ssi $B\mapsto\int_a^B f(t)\ \mathrm{d}t$ est majorée indépendemment de $x>a$. **[preuve pour les 5/2]**

— **Fonctions (continues ou c.p.m.) intégrables** à valeurs réelles ou complexes, sur un intervalle réel.

Espaces $\mathcal{C}^0L^1(I,\mathbb{K})$, $\mathcal{CM}L^1(I,\mathbb{K})$.

— **Théorème de comparaison de fonctions positives**, pour prouver l'intégrabilité (au voisinage d'une borne impropre)
Théorèmes de comparaisons, par majoration du module, ou équivalent ou domination.

— Propriétés de l'intégrale généralisée de fonctions continues (ou c.p.m.) : positivité, linéarité, croissance, relation de Chasles.

Intégration par parties généralisées pour $u'v$ et uv' intégrables.

Changement de variable : pour $\varphi\in\mathcal{C}^1(J,I)$ une bijection strictement monotone, alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u$ converge et si tel est le cas : $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)}\varphi'(u)\ f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u$

— Espaces $\mathcal{CM}L^1(I,\mathbb{K})$, $\mathcal{CM}L^2(I,\mathbb{K})$. Produit scalaire usuel $<\ |\ >: (f,g)\longmapsto\int_I fg$ sur $\mathcal{C}^0L^2(I,\mathbb{R})$

— Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall f,g\in\mathcal{CM}L^2(I,\mathbb{R})$, on a $\int_I f(t)g(t)\ \mathrm{d}t\le\sqrt{\int_I f(t)^2\ \mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_I g(t)^2\ \mathrm{d}t}$