Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. I : Intégrales généralisées

— rappels : intégrale d'une fonction continue sur un segment et sommes de Riemann : $\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k}{N}(b-a)\right)}$

théorème fondamental du calcul intégral : Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, alors pour tout $(a, x) \in I^2$, $\boxed{f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t}$

— Fonctions continues par morceaux, notation $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$, généralisation de la notion d'intégrale sur un segment à ces fonctions.

— Nature d'une intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle réel de la forme $[a, +\infty[$ ou $]\alpha, \beta]$: **convergence** ou **divergence**

— Nature des intégrales généralisées (ou impropres) usuelles :

$\boxed{\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \alpha > 1}$, $\boxed{\int_0^1 t^{-\gamma}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \gamma < 1}$, $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \beta > 0}$, $\boxed{\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t \text{ CV}}$. **[preuves]**

— **Définition (à connaître) : Nature d'une intégrale généralisée** (convergente ou divergente) d'une fonction continue ou continue par morceaux sur un intervalle réel.

— **Critère (C.N.S.) de convergence pour une fonction positive** sur $[a, +\infty[$ (et continue ou continue par morceaux) :
$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ CV ssi $x \longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est bornée indépendemment de $x > a$. **[preuve ⋆]** dans le cas continu.

— Comparaison d'intégrales de fonctions positives : Soient $I = [\alpha, \beta[$ un intervalle réel avec $\beta = \sup(I)$, $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et si g est **à valeurs positives**.

1. Si $\int_\alpha^\beta g$ converge et si : $\forall t \in I,\ |f(t)| \leq g(t)$, alors $\int_\alpha^\beta f$ converge.
2. Si$|f(t)| \underset{t\to\beta^-}{=} O(g(t))$, alors $\int_\alpha^\beta f$ et $\int_\alpha^\beta g$ ont même nature.
3. Si $\int_\alpha^\beta g$ converge et si : $f(t) \underset{t\to\beta^-}{\sim} g(t)$, alors $\int_\alpha^\beta f$ converge.

[preuve ⋆] dans le cas de deux fonctions continues positives f, g avec $0 \leq f \leq g$.

— Propriétés de l'intégrale généralisée convergente : **positivité**, **linéarité**, **croissance**, relation de Chasles

— **Changement de variable** :

pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ une bijection strictement monotone, alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_\alpha^\beta \varphi'(u) f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u$ converge

et si tel est le cas : $\boxed{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} \varphi'(u) f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u}$

Méthode de cours : pour étudier la nature d'une intégrale généralisée, on étudie la continuité, on repère les bornes impropres, puis on étudie la convergence (par passage à la limite avec une expression primitive, ou comparaison via équivalent ou O en une borne impropre quelconque, voire par prolongement par continuité en une borne finie ouverte si la fonction admet un tel prolongement ; en cas de multiples bornes impropres, on peut étudier séparément chaque borne impropre à l'aide de la relation de Chasles.

N.B. le cours sur les fonctins intégrables sera vu plus tard !