

Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques [preuves] signalées en crochet gras colorié sont exigibles.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Ch. I : Intégrales généralisées

- rappels : intégrale d'une fonction continue sur un segment et sommes de Riemann :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k}{N}(b-a)\right)$$

- théorème fondamental du calcul intégral : Si $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$, alors pour tout $(a, x) \in I^2$, $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$

- Fonctions continues par morceaux, généralisation à ces fonctions de la notion d'intégrale sur un segment.

- **Convergence** ou divergence d'une intégrale généralisée sur un intervalle réel I (borné ou non).

- **Nature des intégrales de fonctions usuelles :**

$$\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt \text{ CV ssi } \alpha > 1, \int_0^1 t^{-\gamma} dt \text{ CV ssi } \gamma < 1, \int_{[0, +\infty[} e^{-\beta t} dt \text{ CV ssi } \beta > 0, \int_0^1 \ln(t) dt \text{ CV. } \text{ [preuves]}$$

- **Critère de convergence pour l'intégrale d'une fonction positive** continue (ou continue par morceaux) sur $[a, +\infty[$:

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ CV ssi } B \mapsto \int_a^B f(t) dt \text{ est majorée indépendamment de } x > a. \text{ [preuve pour les 5/2]}$$

- **Fonctions (continues ou c.p.m.) intégrables** à valeurs réelles ou complexes, sur un intervalle réel.

Espaces $\mathcal{C}^0 L^1(I, \mathbb{K})$, $\mathcal{CML}^1(I, \mathbb{K})$.

- **Théorème de comparaison de fonctions positives**, pour prouver l'intégrabilité (au voisinage d'une borne impropre) **Théorèmes de comparaisons**, par majoration du module, ou équivalent ou domination.

- Propriétés de l'intégrale généralisée de fonctions continues (ou c.p.m.) : positivité, linéarité, croissance, relation de Chasles.

Intégration par parties généralisées pour $u'v$ et uv' intégrables.

Changement de variable : pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ une bijection strictement monotone, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si

$$\int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u)) du \text{ converge et si tel est le cas : } \int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \varphi'(u) f(\varphi(u)) du$$

- Espaces $\mathcal{CML}^1(I, \mathbb{K})$, $\mathcal{CML}^2(I, \mathbb{K})$. Produit scalaire usuel $\langle | \rangle : (f, g) \mapsto \int_I fg$ sur $\mathcal{C}^0 L^2(I, \mathbb{R})$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall f, g \in \mathcal{CML}^2(I, \mathbb{R})$, on a $\int_I f(t)g(t) dt \leq \sqrt{\int_I f(t)^2 dt} \sqrt{\int_I g(t)^2 dt}$

Ch. II : Espaces vectoriels, applications linéaires, sommes directes

- Rappels, d'algèbre linéaire : vérification de la linéarité d'une application. Ecriture matricielle d'un endomorphisme explicite ; Somme directe de deux s.-e.v. ; supplémentaires.

- rappels de PCSI : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. Somme directe $A \oplus B$ de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

- Somme $\sum_{i=1}^s E_i$ de plusieurs sous-espaces vectoriels E_1, \dots, E_s d'un \mathbb{K} -e.v. E . Somme directe $\bigoplus_{i=1}^p E_i$ de plusieurs s.-e.v..

- Décomposition en somme directe d'un espace vectoriel. **Base adaptée** à une somme directe.

Relation $\dim\left(\sum_{i=1}^s E_i\right) \leq \sum_{i=1}^s \dim(E_i)$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.