

Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves\*]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

## ch. I : Intégrales généralisées

- rappels : intégrale d'une fonction continue sur un segment et sommes de Riemann :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k}{N}(b-a)\right)$$

**théorème fondamental du calcul intégral** : Si

$f \in C^1(I, \mathbb{R})$ , alors pour tout  $(a, x) \in I^2$ ,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

- Nature d'une intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle réel de la forme  $[a, +\infty[$  ou  $]\alpha, \beta]$  : convergence ou divergence

- Nature des intégrales généralisées (ou impropre) usuelles :

$$\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt \text{ CV ssi } \alpha > 1, \quad \int_0^1 t^{-\gamma} dt \text{ CV ssi } \gamma < 1,$$

$$\int_{[0, +\infty[} e^{-\beta t} dt \text{ CV ssi } \beta > 0, \quad \int_0^1 \ln(t) dt \text{ CV.} \quad \text{[preuves]}$$

- Fonctions continues intégrables sur un intervalle réel quelconque.

- **Définition : Nature d'une intégrale généralisée** (convergente ou divergente) d'une fonction continue ou continue par morceaux sur un intervalle réel.

- Fonctions continues par morceaux, généralisation de la notion d'intégrale sur un segment à ces fonctions.

- **Définition : intégrabilité d'une fonction continue** sur un intervalle réel quelconque.

- intégrabilité d'une fonction continue par morceaux intégrables sur un intervalle réel quelconque.

- **C.N.S. de convergence pour une fonction positive** sur  $[a, +\infty[$  (et continue ou continue par morceaux) :

$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ CV ssi } x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ est bornée indépendamment de } x > a.$  **[preuve\*]** dans le cas continu.

Théorème de comparaison pour des intégrales généralisées convergentes de fonctions continues positives.

**[preuve\*]** dans le cas de deux fonctions continues positives  $f, g$  avec  $0 \leq f \leq g$ .

- Propriété : Si  $f$  est intégrable sur  $I$ , alors l'intégrale généralisée  $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)dt$  converge, **[preuve\*]** dans le cas à valeurs réelles.

Notations :  $\int_I f$  pour une fonction intégrable, espace vectoriel  $\mathcal{CML}^1(I, \mathbb{K})$ , espace vectoriel  $\mathcal{C}^0 L^1(I, \mathbb{K})$ .

- **Théorèmes de comparaison**, pour prouver l'intégrabilité (au voisinage d'une borne impropre) par majoration du module, ou équivalent ou domination.

- Propriétés de l'intégrale généralisée : positivité, linéarité, croissance, relation de Chasles

- Propriétés de l'intégrale généralisée : positivité, linéarité, croissance, relation de Chasles.

**Changement de variable** :

pour  $\varphi \in C^1(J, I)$  une bijection strictement monotone, alors  $\int_a^b f(t) dt$  converge si et seulement si

$\int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u)) du$  converge et si tel est le cas :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \varphi'(u)f(\varphi(u)) du$$

- Définition de la notion de produit scalaire sur un  $\mathbb{R}$ -e.v. . Espace  $\mathcal{CML}^2(I, \mathbb{K})$ , produit scalaire usuel  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  sur  $\mathcal{C}^0 L^2(I, \mathbb{R})$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$\forall f, g \in \mathcal{CML}^2(I, \mathbb{R})$ , on a

$$\int_I f(t)g(t) dt \leq \sqrt{\int_I f(t)^2 dt} \sqrt{\int_I g(t)^2 dt}$$

→ T.S.V.P.

# Ch. II : E.V.N., limites, continuité

## Révisions de PCSI

### 1. Rappels de PCSI

#### (a) Espace vectoriels.

*Compétence : Savoir justifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qui le contient.*

#### (b) Produits scalaires sur un espace vectoriel réel.

*Compétence : Savoir justifier qu'une application est un produit scalaire, qu'une famille de vecteurs est orthogonale*

#### (c) Normes.

*Compétence : Savoir justifier qu'une application est une norme*

#### (d) Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.

#### (e) Bases orthonormées d'un espace vectoriel réel.

#### (f) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

*Compétence : connaître la formule du théorème de projection orthogonale, et une interprétation graphique en dimension 2 ou 3*

### 2. Normes en dimension finie

#### (a) Normes 1, 2, $\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ .

(b) Comparaison de normes en dimension finie.  
[définition \*]

### 3. Boules

#### (a) Boules fermées $B_f(x_0, r)$ de centre $x_0$ et de rayon $r \geq 0$ .

Boules ouvertes dans un espace vectoriel normé.

*Compétence : Savoir dessiner dans le plan des boules ouvertes ou fermées pour une norme explicite*

#### (b) Partie bornée.

### 4. Limites, continuité.

#### (a) Limite d'une suite vectorielle dans un e.v.n.

*Compétence : Savoir quantifier avec  $\varepsilon$  la notion de limite d'une suite vectorielle dans un e.v.n. ;*

En dimension finie, la notion de limite ne dépend pas de la norme choisie.

#### (b) Continuité d'une fonction de la variable vectorielle à valeurs dans un espace vectoriel

*Compétence : Savoir quantifier avec  $\varepsilon$  la notion de continuité d'une application entre espaces vectoriels normés.*

à venir : applications lipschitziennes