

Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques [preuves] signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques [preuves*] signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

ch. I : Intégrales généralisées

- rappels : intégrale d'une fonction continue sur un segment et sommes de Riemann :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k}{N}(b-a)\right)$$

théorème fondamental du calcul intégral : Si

$$f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), \text{ alors pour tout } (a, x) \in I^2, f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

- Nature d'une intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle réel de la forme $[a, +\infty[$ ou $] \alpha, \beta]$: **convergence** ou **divergence**

- Nature des intégrales généralisées (ou impropres) usuelles :

$$\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt \text{ CV ssi } \alpha > 1, \int_0^1 t^{-\gamma} dt \text{ CV ssi } \gamma < 1,$$

$$\int_{[0, +\infty[} e^{-\beta t} dt \text{ CV ssi } \beta > 0, \int_0^1 \ln(t) dt \text{ CV. [preuves]}$$

- Fonctions continues intégrables sur un intervalle réel quelconque.

- **Définition : Nature d'une intégrale généralisée** (convergente ou divergente) d'une fonction continue ou continue par morceaux sur un intervalle réel.

- Fonctions continues par morceaux, généralisation de la notion d'intégrale sur un segment à ces fonctions.

- **Définition : intégrabilité d'une fonction continue** sur un intervalle réel quelconque.

- intégrabilité d'une fonction continue par morceaux intégrables sur un intervalle réel quelconque.

- **C.N.S. de convergence pour une fonction positive** sur $[a, +\infty[$ (et continue ou continue par morceaux) :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ CV ssi } x \mapsto \int_a^x f(t) dt \text{ est bornée indépendamment de } x > a. \text{ [preuve *] dans le cas continu.}$$

Théorème de comparaison pour des intégrales généralisées convergentes de fonctions continues positives.

[preuve *] dans le cas de deux fonctions continues positives f, g avec $0 \leq f \leq g$.

- Propriété : Si f est intégrable sur I , alors l'intégrale généralisée $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)dt$ converge, [preuve *] dans le cas à valeurs réelles.

Notations : $\int_I f$ pour une fonction intégrable, espace vectoriel $\mathcal{CML}^1(I, \mathbb{K})$, espace vectoriel $\mathcal{C}^0 L^1(I, \mathbb{K})$.

- **Théorèmes de comparaison**, pour prouver l'intégrabilité (au voisinage d'une borne impropre) par majoration du module, ou équivalent ou domination.

- Propriétés de l'intégrale généralisée : **positivité**, **linéarité**, **croissance**, relation de Chasles

- Propriétés de l'intégrale généralisée : **positivité**, **linéarité**, **croissance**, relation de Chasles.

Changement de variable :

pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ une bijection strictement monotone, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si

$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(u) f(\varphi(u)) du$ converge et si tel est le cas :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \varphi'(u) f(\varphi(u)) du$$

- Définition de la notion de **produit scalaire** sur un \mathbb{R} -e.v. . Espace $\mathcal{CML}^2(I, \mathbb{K})$, **produit scalaire usuel** $\langle | \rangle$ sur $\mathcal{C}^0 L^2(I, \mathbb{R})$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$\forall f, g \in \mathcal{CML}^2(I, \mathbb{R})$, on a

$$\left| \int_I f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_I f(t)^2 dt} \sqrt{\int_I g(t)^2 dt}$$

→ T.S.V.P.

Ch. II : E.V.N., limites, continuité

Révisions de PCSI

1. Rappels de PCSI

(a) Espace vectoriels.

Compétence : Savoir justifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qui le contient.

(b) Produits scalaires sur un espace vectoriel réel.

Compétence : Savoir justifier qu'une application est un produit scalaire, qu'une famille de vecteurs est orthogonale

(c) Normes.

Compétence : Savoir justifier qu'une application est une norme

(d) Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.

(e) Bases orthonormées d'un espace vectoriel réel.

(f) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

Compétence : connaître la formule du théorème de projection orthogonale, et une interprétation graphique en dimension 2 ou 3

à venir : applications lipschitziennes

2. Normes en dimension finie

(a) Normes 1, 2, ∞ sur \mathbb{R}^n .

(b) Comparaison de normes en dimension finie.

[définition *]

3. Boules

(a) Boules fermées $B_f(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon $r \geq 0$.

Boules ouvertes dans un espace vectoriel normé.

Compétence : Savoir dessiner dans le plan des boules ouvertes ou fermées pour une norme explicite

(b) Partie bornée.

4. Limites, continuité.

(a) Limite d'une suite vectorielle dans un e.v.n.

Compétence : Savoir quantifier avec ε la notion de limite d'une suite vectorielle dans un e.v.n. ;

En dimension finie, la notion de limite ne dépend pas de la norme choisie.

(b) Continuité d'une fonction de la variable vectorielle à valeurs dans un espace vectoriel

Compétence : Savoir quantifier avec ε la notion de continuité d'une application entre espaces vectoriels normés.