Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. I : Intégrales généralisées

— rappels : intégrale d'une fonction continue sur un segment et sommes de Riemann : $\boxed{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a+\frac{k}{N}(b-a)\right)}$

— **théorème fondamental du calcul intégral** : Si $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$, alors pour tout $(a,x) \in I^2$, $\boxed{f(x)-f(a) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t}$

— Fonctions continues par morceaux, notation $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$, généralisation de la notion d'intégrale sur un segment à ces fonctions.

— **Définition (à connaître) : Nature d'une intégrale généralisée** (convergente ou divergente) d'une fonction continue ou continue par morceaux sur un intervalle réel de la forme $[a,+\infty[$ ou $]a,b]$.

— Nature des intégrales généralisées (ou impropres) usuelles :
$\boxed{\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \alpha > 1}$, $\boxed{\int_0^1 t^{-\gamma}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \gamma < 1}$, $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \beta > 0}$, $\boxed{\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t \text{ CV}}$. **[preuves]**

— **Critère (C.N.S.) de convergence pour une fonction positive** sur $[a,+\infty[$ (et continue par morceaux) :
$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ CV ssi $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée indépendemment de $x > a$. **[preuve ⋆]**

— Comparaison d'intégrales de fonctions positives : Soient $I = [\alpha,\beta[$ un intervalle réel avec $\beta = \sup(I)$, $f,g \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$ et si g est **à valeurs positives**.

1. Si $\int_\alpha^\beta g$ converge et si : $\forall t \in I,\ |f(t)| \leq g(t)$, alors $\int_\alpha^\beta f$ converge.
2. si $f(t) \underset{t\to\beta^-}{\sim} g(t)$ alors $\int_\alpha^\beta f$ converge ssi $\int_\alpha^\beta g$ converge
3. Si g est intégrable sur I et si : $|f(t)| \underset{t\to\beta^-}{=} O(g(t))$, alors $\int_\alpha^\beta f$ et $\int_\alpha^\beta g$ ont même nature.

[preuve ⋆] dans le cas de deux fonctions continues positives f,g avec $0 \leq f \leq g$.

— Propriétés de l'intégrale généralisée convergente : **positivité**, **linéarité**, **croissance**, relation de Chasles

— Intégration par parties, version intégrales généralisées.

— **Changement de variable** :

pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,I)$ une bijection strictement monotone, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))\,\mathrm{d}u$ converge

et si tel est le cas : $\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} \varphi'(u)f(\varphi(u))\,\mathrm{d}u}$

ch. II : Séries numériques, rappels et compléments

1. Rappels de PCSI :
sommes partielles, somme et restes d'une série convergente, séries de référence (**Riemann**, **géométrique**, **exponentielle**)
C.N.S. de convergence pour une série à termes ≥ 0, absolue convergence, grossière divergence.
Théorème de comparaison ($0 \leq |u_n| \leq v_n$, via $O(\ )$, via $\sim$ pour des séries positives).

:

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

T1 : Clémence, Miriam, Nathan T
T2 : Louis
T3 : Ollie (Mathéïs)
T4 : Marie
T5 : Arthus, Volodymyr
T7 : Enora, Camille G.