ch. I : Intégrales généralisées

- rappels : intégrale d'une fonction continue sur un segment et sommes de Riemann, théorème fondamental du calcul intégral.
- Fonctions continues par morceaux, notation $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$, généralisation de la notion d'intégrale sur un segment à ces fonctions.
- Nature d'une intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle réel : **convergence** ou **divergence**
- Nature des intégrales généralisées (ou impropres) usuelles : $\boxed{\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \alpha>1}$, $\boxed{\int_0^1 t^{-\gamma}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \gamma<1}$, $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \beta>0}$, $\boxed{\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t \text{ CV}}$. **[preuves]**
- **C.N.S. de convergence pour une fonction positive** sur $[a,+\infty[$ (et continue ou continue par morceaux) : $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ CV ssi $x\longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée indépendemment de $x>a$. **[preuve $\star$]** dans le cas continu.
- Comparaison d'intégrales de fonctions positives : Soient $I=[\alpha,\beta[$ un intervalle réel avec $\beta=\sup(I)$, $f,g\in\mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$ et si g est **à valeurs positives**.
  1. Si $\int_\alpha^\beta g$ converge et si : $\forall t\in I,\ |f(t)|\leq g(t)$, alors $\int_\alpha^\beta f$ converge.
  2. Si $|f(t)| \underset{t\to\beta^-}{=} O(g(t))$, alors $\int_\alpha^\beta f$ et $\int_\alpha^\beta g$ ont même nature.
  3. Si $\int_\alpha^\beta g$ converge et si : $f(t)\underset{t\to\beta^-}{\sim} g(t)$, alors $\int_\alpha^\beta f$ converge.

  [preuve $\star$] dans le cas de deux fonctions continues positives f,g avec $0\leq f\leq g$.
- Propriétés de l'intégrale généralisée convergente : **positivité**, **linéarité**, **croissance**, relation de Chasles
- **Changement de variable** : pour $\varphi\in\mathcal{C}^1(J,I)$ une bijection strictement monotone, alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u$ converge et si tel est le cas : $\boxed{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} \varphi'(u)f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u}$

Méthode de cours : pour étudier la nature d'une intégrale généralisée, on étudie la continuité, on repère les bornes impropres, puis on étudie la convergence (par passage à la limite avec une expression primitive, ou comparaison via équivalent ou O en une borne impropre quelconque, voire par prolongement par continuité en une borne finie ouverte si la fonction admet un tel prolongement ; en cas de multiples bornes impropres, on peut étudier séparément chaque borne impropre à l'aide de la relation de Chasles.

N.B. le cours sur les fonctins intégrables sera vu plus tard !

ch. II : Séries numériques, rappels et compléments

1. Rappels de PCSI :
   sommes partielles, somme et restes d'une série convergente, séries de référence (**Riemann**, **géométrique**, **exponentielle**)
   C.N.S. de convergence pour une série à termes ≥ 0
   Absolue convergence, grossière divergence.
   Théorème de comparaison
   ($0\leq|u_n|\leq v_n$, via $O(\ )$, via $\sim$ pour des séries positives).

2. **Technique de comparaison série intégrale** : *le théorème de comparaison série intégrale ne figure pas explicitement au programme les étudiants doivent savoir représenter graphiquement et encadrer des* $\int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t$ *pour une fonction monotone, puis obtenir des encadrements de sommes partielles à l'aide d'intégrale pour conclure*
   principe de comparaison série intégrale, à connaître :
   si $f:[n_0,+\infty[$ est continue, décroissante, positive, alors $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ont même nature.
   Obtention d'équivalents de restes d'une série convergente, ou d'équivalents de sommes partielles de séries divergentes
3. **Règle de d'Alembert** des séries numériques, application aux séries exponentielles.
4. **Théorème spécial des séries alternées**, avec signe du reste et majoration.
5. **Formule de Stirling** $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ (démonstration non exigible)

   N.B. : L'asymptotique $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \gamma + o(1)$ *ne figure pas explicitement au programme, mais peut faire l'objet d'un exercice via la technique de comparaison série-intégrale.*

---

on pourra demander aux étudiants **[preuve $\star$]** des exemples explicites de séries telles que :

- $\sum u_n$ CV mais $\sum |u_n|$ DV, telle $\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n}$.
- $\sum u_n$ CV, $\sum v_n$ DV et $u_n\sim v_n$,

telles $\sum_{n\geq2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{1/2}}\right)$ et $\sum_{n\geq2}\frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$.

à venir : produits de Cauchy de deux séries A.C.V.

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une $\boxed{\text{formule}}$ encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[preuve ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn et Corentin, T7 Clémentine