Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
  Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.
  Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.
  Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.
- Vous passez ensuite aux exercices.

# Ch. II : E.V.N., limites, continuité

## Révisions de PCSI

1. Rappels de PCSI
   (a) Espace vectoriels.
   *Compétence : Savoir justifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qui le contient.*
   (b) Produits scalaires sur un espace vectoriel réel.
   *Compétence : Savoir justifier qu'une application est un produit scalaire, qu'une famille de vecteurs est orthogonale*
   (c) Normes.
   *Compétence : Savoir justifier qu'une application est une norme*
   (d) Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.
   (e) Bases orthonormées d'un espace vectoriel réel.
   (f) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.
   *Compétence : connaître la formule du théorème de projection orthogonale, et une interprétation graphique en dimension 2 ou 3*
2. Normes en dimension finie
   (a) **Normes 1, 2, $\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.**
   (b) Comparaison de normes en dimension finie. **[définition ⋆]**
3. Boules
   (a) **Boules fermées** $B_f(x_0, r)$ de centre $x_0$ et de rayon $r \geq 0$.
   Boules ouvertes dans un espace vectoriel normé.
   *Compétence : Savoir dessiner dans le plan des boules ouvertes ou fermées pour une norme explicite*
   (b) Partie bornée.
4. Limites, continuité.
   (a) **Limite d'une suite vectorielle** dans un e.v.n.
   *Compétence : Savoir quantifier avec $\varepsilon$ la notion de limite d'une suite vectorielle dans un e.v.n. ;*
   En dimension finie, la notion de limite ne dépend pas de la norme choisie.
   (b) **Continuité d'une fonction** de la variable vectorielle à valeurs dans un espace vectoriel
   *Compétence : Savoir quantifier avec $\varepsilon$ la notion de continuité d'une application entre espaces vectoriels normés.*
   (c) **Application lipschitzienne**.
   Toute application lipschitzienne est continue. **[preuve ⋆]**

# Ch. III : Séries numériques

- *Rappels de PCSI :*
  — Série numérique, sommes partielles.
  **CNS de convergence d'une série à termes positifs.** **[preuve]**
  **Séries géométriques** $\sum_{n\geq 0} \gamma^n$,
  valeur de la somme **[preuve]**,
  nature convergente ssi $|\gamma| < 1$ **[preuve]**
  **Séries de Riemann** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, nature. **[preuve]**
  **Séries absolument convergentes**.
  — **Théorèmes de comparaison** ( entre séries positives ;d'une série réelle à une série positive) :
  encadrement $|u_n| \leq v_n$, équivalent à un terme strictement positif $u_n \sim v_n > 0$.
- *Compléments de PC sur les séries numériques :*
  — Théorème de **Comparaison série-intégrale**.
  Les étudiants doivent savoir encadrer $\sum_{k=1} f(k)$ à l'aide de deux intégrales **[preuve ⋆]**
  — **Règle de d'Alembert** pour une série à termes TOUS non nuls. **[preuve ⋆]**
  — **Série exponentielle** d'un complexe $z$ : $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est ACV, sa somme est notée $\exp(z)$.
  Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour étudier la suite des sommes partielles : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \exp(x)$.
  — Séries alternées, **Critère spécial des séries alternées** et **majoration du reste** $|R_N| \leq |u_{N+1}|$.
  — **Formule de Stirling** $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ (démonstration non exigible)

- *Exemples à connaître :*
  $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente, non grossièrement divergente. De plus la suite $(s_n)_{n\geq 1}$, définie pour $n \geq 1$ par $s_n = -\ln(n) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, est décroissante et minorée donc convergente vers une limite $\gamma$.

  $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, non absolument divergente.

  $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente, même si son terme général est équivalent à $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est lui le terme général d'une série convergente.