Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. I : Intégrales généralisées

— Propriétés de l'intégrale généralisée : **positivité**, **linéarité**, **croissance**, relation de Chasles.

Changement de variable :
pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ une bijection strictement monotone, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi'(u) f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u$ converge et si tel est le cas :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} \varphi'(u) f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u}$$

— Définition de la notion de produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-e.v. . Espace $\mathcal{CML}^2(I, \mathbb{K})$, **produit scalaire usuel** $< | >$ sur $\mathcal{C}^0 L^2(I, \mathbb{R})$

— Inégalité de Cauchy-Schwarz :
$\forall f, g \in \mathcal{CML}^2(I, \mathbb{R})$, on a

$$\boxed{\int_I f(t)g(t)\ \mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_I f(t)^2\ \mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_I g(t)^2\ \mathrm{d}t}}$$

Ch. II : E.V.N., limites, continuité

Révisions de PCSI

1. Rappels de PCSI
   (a) Espace vectoriels.
   Compétence : Savoir justifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qui le contient.
   (b) Produits scalaires sur un espace vectoriel réel.
   Compétence : Savoir justifier qu'une application est un produit scalaire, qu'une famille de vecteurs est orthogonale
   (c) Normes.
   Compétence : Savoir justifier qu'une application est une norme
   (d) Norme associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.
   (e) Bases orthonormées d'un espace vectoriel réel.
   (f) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.
   Compétence : connaître la formule du théorème de projection orthogonale, et une interprétation graphique en dimension 2 ou 3
2. Normes en dimension finie
   (a) **Normes 1, 2, ∞ sur $\mathbb{R}^n$.**
   (b) Comparaison de normes en dimension finie. **[définition ⋆]**
3. Boules
   (a) **Boules fermées** $B_f(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon $r \geq 0$.
   Boules ouvertes dans un espace vectoriel normé.
   Compétence : Savoir dessiner dans le plan des boules ouvertes ou fermées pour une norme explicite
   (b) Partie bornée.
4. Limites, continuité.
   (a) Limite d'une suite vectorielle dans un e.v.n.
   Compétence : Savoir quantifier avec ε la notion de limite d'une suite vectorielle dans un e.v.n. ;
   En dimension finie, la notion de limite ne dépend pas de la norme choisie.
   (b) Continuité d'une fonction de la variable vectorielle à valeurs dans un espace vectoriel
   Compétence : Savoir quantifier avec ε la notion de continuité d'une application entre espaces vectoriels normés.
   (c) Partie ouverte.
   (d) **Application lipschitzienne**.
   Toute application lipschitzienne est continue. **[preuve ⋆]**

⟶ T.S.V.P.

Ch. III : Séries numériques

- *Rappels de PCSI :*
  - Série numérique, sommes partielles.
  - **CNS de convergence d'1 série à termes positifs.** **[preuve ⋆]**
    Séries géométriques $\sum_{n\geq 0}\gamma^n$,
    valeur de la somme partielle $S_N=\sum_{k=0}^{N}\gamma^k$ **[preuve]**,
    nature convergente ssi $|\gamma|<1$ **[preuve]**
    Séries de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$, nature.
  - **Séries absolument convergentes**.
  - **Séries grossièrement divergentes**.
  - **Théorèmes de comparaison** (entre séries positives ;à une série positive) :
    encadrement $|u_n|\leq v_n$, grand O, équivalent à un terme strictement positif $u_n\sim v_n>0$.
- *Compléments de PC sur les séries numériques :*
  - Théorème de **Comparaison série-intégrale**.

    encadrer explicitement $\sum_{k=1}^{N} f(k)$ à l'aide de deux intégrales **[preuve ⋆]**
  - **Règle de d'Alembert** pour une série à termes TOUS non nuls. **[preuve ⋆]**
  - **Série exponentielle** d'un complexe z : $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ est ACV, sa somme est notée $\exp(z)$.
    Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour étudier la suite des sommes partielles :
    $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x=\exp(x)$.
  - Séries alternées, **Critère spécial des séries alternées** et **majoration du reste** $|R_N|\leq|u_{N+1}|$.
- *Exemples à connaître :*
  $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente, non grossièrement divergente. De plus la suite $(s_n)_{n\geq 1}$, définie pour $n\geq 1$ par
  $s_n=-\ln(n)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, est décroissante et minorée donc convergente vers une limite γ.
  $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, non absolument divergente.
  $\sum_{n\geq 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente, même si son terme général est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est lui le terme général d'une série convergente.

à venir : Formule de Stirling ; Produits de Cauchy de séries ACV ;