Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. II : Séries numériques, rappels et compléments

1. Rappels de PCSI : sommes partielles, somme et restes d'une série convergente, séries de référence (**Riemann**, **géométrique**, **exponentielle**)
   C.N.S. de convergence pour une série à termes ≥ 0, absolue convergence, grossière divergence.
   Théorème de comparaison ($0 \leq |u_n| \leq v_n$, via $O(\ )$, via $\sim$ pour des séries positives).
2. Enoncé de la **Formule de Stirling** $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$
3. **Technique de comparaison série intégrale**, Obtention d'équivalents de restes d'une série convergente, ou d'équivalents de sommes partielles de séries divergentes.
   le théorème de comparaison série intégrale ne figure pas explicitement au programme les étudiants doivent savoir représenter graphiquement et encadrer des $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ *pour une fonction monotone, puis obtenir des encadrements de sommes partielles à l'aide d'intégrale pour conclure.*
   principe de comparaison série intégrale, à connaître : si $f : [n_0, +\infty[$ *est continue, décroissante, positive, alors* $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} f(n)$ *et* $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ *ont même nature.*
   L'asymptotique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \gamma + o(1)$ *ne figure pas explicitement au programme, mais peut faire l'objet d'un exercice*
4. **Règle de d'Alembert** des séries numériques, application aux séries exponentielles.
5. **Théorème spécial des séries alternées**, avec signe du reste et majoration.
6. Produit de Cauchy de deux séries A.C.V.

on pourra demander aux étudiants **[preuve ⋆]** des exemples explicites de séries telles que :

- $\sum u_n$ CV mais $\sum |u_n|$ DV, telle $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.
- $\sum u_n$ CV, $\sum v_n$ DV et $u_n \sim v_n$,

telles $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$.

ch. I : Intégrales généralisées

— Nature des intégrales généralisées (ou impropres) usuelles : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^{-\gamma}\mathrm{d}t \text{ CV ssi } \gamma < 1}$, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t \text{ CV}}$. **[preuves]**

— **Critère (C.N.S.) de convergence** pour une **fonction positive** sur $[a, +\infty[$ (et continue par morceaux) :
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ CV ssi $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est bornée indépendemment de $x > a$. **[preuve ⋆]**

— Comparaison d'intégrales de fonctions positives : Soient $I = [\alpha, \beta[$ un intervalle réel avec $\beta = \sup(I)$, $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et si g est **à valeurs positives**.

1. Si $\displaystyle\int_\alpha^\beta g$ converge et si : $\forall t \in I,\ |f(t)| \leq g(t)$, alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ converge.
2. si $f(t) \underset{t\to\beta^-}{\sim} g(t)$ alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ converge ssi $\displaystyle\int_\alpha^\beta g$ converge
3. Si g est intégrable sur I et si : $|f(t)| \underset{t\to\beta^-}{=} O(g(t))$, alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta g$ ont même nature.

[preuve ⋆] dans le cas de deux fonctions continues positives f, g avec $0 \leq f \leq g$.

— Propriétés de l'intégrale généralisée convergente : **positivité**, **linéarité**, **croissance**, relation de Chasles

— Intégration par parties, version intégrales généralisées.

— **Changement de variable** : pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ une bijection strictement monotone, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi'(u) f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u$ converge et si tel est le cas : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(a)} \varphi'(u) f(\varphi(u))\ \mathrm{d}u}$

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

T1 : Clémence, Miriam, Nathan T
T2 : Louis
T3 : Ollie (Mathéïs)
T4 : Marie
T5 : Arthus, Volodymyr
T7 : Enora, Camille G.