ch. II : Séries numériques, rappels et compléments

1. Rappels de PCSI :
   sommes partielles, somme et restes d'une série convergente, séries de référence (**Riemann**, **géométrique**, **exponentielle**)
   C.N.S. de convergence pour une série à termes ≥ 0
   Absolue convergence, grossière divergence.
   Théorème de comparaison
   ($0 \leq |u_n| \leq v_n$, via $O(\ )$, via $\sim$ pour des séries positives).

2. **Technique de comparaison série intégrale** : *le théorème de comparaison série intégrale ne figure pas explicitement au programme les étudiants doivent savoir représenter graphiquement et encadrer des $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une fonction monotone, puis obtenir des encadrements de sommes partielles à l'aide d'intégrale pour conclure*

   principe de comparaison série intégrale, à connaître :
   si $f : [n_0, +\infty[$ est continue, décroissante, positive, alors $\displaystyle\sum_{n \geq n_0} f(n)$ et $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ont même nature.

   Obtention d'équivalents de restes d'une série convergente, ou d'équivalents de sommes partielles de séries divergentes

3. **Règle de d'Alembert** des séries numériques, application aux séries exponentielles.

4. **Théorème spécial des séries alternées**, avec signe du reste et majoration.

5. **Formule de Stirling** $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ (démonstration non exigible)

   N.B. : L'asymptotique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \gamma + o(1)$ ne figure pas explicitement au programme, mais peut faire l'objet d'un exercice via la technique de comparaison série-intégrale.

6. Produit de Cauchy de deux séries A.C.V.

---

on pourra demander aux étudiants **[preuve ⋆]** des exemples explicites de séries telles que :

- $\sum u_n$ CV mais $\sum |u_n|$ DV, telle $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.
- $\sum u_n$ CV, $\sum v_n$ DV et $u_n \sim v_n$,

telles $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$.

chap. III : Algèbre linéaire générale

— rappels de PCSI : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels.
Compétence : Savoir justifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qui le contient.
Somme directe $F \oplus G$ de deux sous-espaces vectoriels de E, avec $F \oplus G \subset E$.
Sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E : $F \oplus G = E$.

vérification de la linéarité d'une application. Ecriture matricielle d'un endomorphisme explicite ;
Compétence : Savoir justifier qu'une application est linéaire, un endomorphisme, un isomorphisme, un automorphisme.

— projecteurs, symétries.

— Calculs de déterminants : propriétés usuelles, déterminant d'un produit de matrices. Déterminant et caractérisation de la liberté d'un famille de vecteurs colonnes.

— **Formule de développement** par rapport à une ligne ou une colonne.

— $\boxed{\textbf{Somme } \sum_{i=1}^{s} E_i}$ de plusieurs sous-espaces vectoriels $E_1, \dots E_s$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. $\boxed{\textbf{Somme directe } \bigoplus_{i=1}^{p} E_i}$ de plusieurs s.-e.v..

— Décomposition en somme directe d'un espace vectoriel. **Base adaptée** à une somme directe.
Relation $\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{s} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{s} \dim(F_i)}$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

— **Sous-espace vectoriel stable** par un endomorphisme.

— $\boxed{\text{Endomorphisme induit } u_{|F}^{|F}}$ sur un sous-espace vectoriel F stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. Matrice triangulaire par blocs.

— **Caractérisation s'un s.e.v. stable par l'écriture matri** dans une base adaptée à une somme directe $F \oplus G = E$ lorsque F est stable par u.

— F est stable par u ssi la matrice est triangulaire par blocs dans une base adaptée **[preuve ⋆]**

— Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(u)$ **et** $\mathrm{Im}(u)$ **sont stables par** u **[preuves]**

Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v **[preuves]**

— Calculs matriciel par blocs.

à venir : déterminants par blocs, matrices semblables, trace d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[preuve ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn et Corentin, T7 Clémentine