Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.
• Vous passez ensuite aux exercices.

Ch. II : Espaces vectoriels, applications linéaires, sommes directes

— Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme.
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u **[preuves]**
Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v **[preuves]**

— Endomorphisme induit $u_{|F}^{|F}$ sur un sous-espace vectoriel F stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. Matrice triangulaire par blocs.
Ecriture matricielle dans une base adaptée à une somme directe $F \oplus G = E$ lorsque F est stable par u : matrice triangulaire par blocs
Calculs matriciel de produits par blocs.

— Calculs de déterminants : rappels de PCSI : développements par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'un produit de matrices. Déterminants triangulaire par blocs. Déterminant et caractérisation de la liberté d'un famille de vecteurs colonnes.
— **Formules de développement** d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.
— **Matrices semblables** : $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables (sur $\mathbb{K}$) s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$B = P^{-1}AP$$

Deux matrices semblables ont même déterminant. Déterminant d'un endomorphisme.
— Déterminant de Vandermonde.
— Trace d'une matrice, d'un endomorphisme. Linéarité, trace d'un produit, d'une transposée ;
— Deux matrices semblables ont même trace. **[preuve]**. Déterminant d'un endomorphisme.

Ch. III : Séries numériques

Révisions de PCSI

• *Rappels de PCSI :*

— Série numérique, sommes partielles.

— **CNS de convergence d'une série à termes positifs.** **[preuve]**
Séries géométriques $\sum_{n\geq 0} \gamma^n$,
Convergence et valeur de la somme si $|\gamma| < 1$ **[preuve]**,

— **Séries de Riemann** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, nature. **[preuve]**

— **Séries absolument convergentes**.

— **Théorèmes de comparaison** (entre séries positives ;d'une série réelle à une série positive) : encadrement $|u_n| \leq v_n$, équivalent à un terme strictement positif $u_n \sim v_n > 0$.

• *Compléments de PC sur les séries numériques :*

— Théorème de **Comparaison série-intégrale**.
Les étudiants doivent savoir encadrer $\sum_{k=1} f(k)$ à l'aide de deux intégrales **[preuve ⋆]**

— Séries alternées, **Critère spécial des séries alternées** et **majoration du reste** $|R_N| \leq |u_{N+1}|$.

— **Règle de d'Alembert** pour une série à termes TOUS non nuls. **[preuve ⋆]**

• *Exemples à connaître :*
$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, non grossièrement divergente. De plus la suite $(s_n)_{n\geq 1}$, définie pour $n \geq 1$ par