Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

chap. III : Algèbre linéaire générale

— rappels de PCSI : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels.
Compétence : Savoir justifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qui le contient.
Somme directe $F \oplus G$ de deux sous-espaces vectoriels de E, avec $F \oplus G \subset E$.
Sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E : $F \oplus G = E$.

— **Somme $\sum_{i=1}^{s} E_i$** de plusieurs sous-espaces vectoriels $E_1, \dots E_s$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. **Somme directe $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$** de plusieurs s.-e.v..

— Décomposition en somme directe d'un espace vectoriel.

— **Base adaptée** à une somme directe.

— Relation $\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{s} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{s} \dim(F_i)}$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

— **Sous-espace vectoriel stable** par un endomorphisme.

— Endomorphisme induit $u_{|F}^{|F}$ sur un sous-espace vectoriel F stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. Matrice triangulaire par blocs.

Compétence : les étudiants doivent savoir définir la notion de projecteur, connaître la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ et savoir que $\mathrm{Im}(p) = \{y \in E; p(y) = y\}$, un dessin peut-être demandé.

— **Caractérisation matricielle s'un s.e.v. stable** :
F est stable par u ssi la matrice de u dans une base adaptée à une somme directe $F \oplus G = E$ est triangulaire par blocs. **[preuve ⋆]**

à venir : déterminants, traces

ch. II : Séries numériques, rappels et compléments

1. Rappels de PCSI : sommes partielles, somme et restes d'une série convergente, séries de référence (**Riemann**, **géométrique**, **exponentielle**)
C.N.S. de convergence pour une série à termes ≥ 0, absolue convergence, grossière divergence.
Théorème de comparaison ($0 \leq |u_n| \leq v_n$, via $O(\ )$, via $\sim$ pour des séries positives).

2. Enoncé de la **Formule de Stirling** $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$

3. **Technique de comparaison série intégrale**, Obtention d'équivalents de restes d'une série convergente, ou d'équivalents de sommes partielles de séries divergentes.
le théorème de comparaison série intégrale ne figure pas explicitement au programme les étudiants doivent savoir représenter graphiquement et encadrer des $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une fonction monotone, puis obtenir des encadrements de sommes partielles à l'aide d'intégrale pour conclure.
principe de comparaison série intégrale, à connaître : si $f : [n_0, +\infty[$ est continue, décroissante, positive, alors $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ont même nature.
L'asymptotique $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \gamma + o(1)$ ne figure pas explicitement au programme, mais peut faire l'objet d'un exercice

4. **Règle de d'Alembert** des séries numériques, application aux séries exponentielles.

5. **Théorème spécial des séries alternées**, avec signe du reste et majoration.

6. Produit de Cauchy de deux séries A.C.V.

on pourra demander aux étudiants **[preuve ⋆]** des exemples explicites de séries telles que :

• $\sum u_n$ CV mais $\sum |u_n|$ DV, telle $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

• $\sum u_n$ CV, $\sum v_n$ DV et $u_n \sim v_n$, telles $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}\right)$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$.

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

T1 : Clémence, Miriam
T2 : Louis
T3 : Ollie (Mathéïs)
T4 : Marie
T5 : Arthus, Volodymyr
T7 : Enora, Camille G.