Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Ch. II : E.V.N., limites, continuité

Révisions de PCSI

1. Partie ouverte.
2. **Application lipschitzienne**.

   Toute application lipschitzienne est continue. **[preuve ⋆]**

Ch. III : Séries numériques

• *Rappels de PCSI :*

— Série numérique, sommes partielles.

— **CNS de convergence d'1 série à termes positifs.** **[preuve ⋆]**

Séries géométriques $\sum_{n\geq 0}\gamma^n$,

valeur de la somme partielle $S_N=\sum_{k=0}^{N}\gamma^k$ **[preuve]**,

nature convergente ssi $|\gamma|<1$ **[preuve]**

Séries de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$, nature.

— **Séries absolument convergentes**.

— **Séries grossièrement divergentes**.

— **Théorèmes de comparaison** (entre séries positives ;à une série positive) :

encadrement $|u_n|\leq v_n$, grand O, équivalent à un terme strictement positif $u_n\sim v_n>0$.

• *Compléments de PC sur les séries numériques :*

— Théorème de **Comparaison série-intégrale**.

encadrer explicitement $\sum_{k=1}^{N}f(k)$ à l'aide de deux intégrales **[preuve ⋆]**

— **Règle de d'Alembert** pour une série à termes TOUS non nuls. **[preuve ⋆]**

— **Série exponentielle** d'un complexe z : $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ est ACV, sa somme est notée $\exp(z)$.

Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour étudier la suite des sommes partielles :

$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x=\exp(x)$.

— Séries alternées, **Critère spécial des séries alternées** et **majoration du reste** $|R_N|\leq|u_{N+1}|$.

— **Formule de Stirling** $\boxed{n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ (démonstration non exigible)

— Produit de Cauchy (démonstration non exigible) :

si $\sum_p u_p$ et $\sum_q v_q$ sont ACV, alors la série $\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{k}u_pv_{n-p}\right)$ est ACV et sa somme est égale aux produit $\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_p\times\sum_{q=0}^{+\infty}v_q\right)$.

Application :

$\exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\exp(z_2),\quad\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$ **[preuve ⋆]**

• *Exemples à connaître :*

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente, non grossièrement divergente. De plus la suite $(s_n)_{n\geq 1}$, définie pour $n\geq 1$ par

$s_n=-\ln(n)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, est décroissante et minorée donc convergente vers une limite γ.

$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, non absolument divergente.

$\sum_{n\geq 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente, même si son terme général est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est lui le terme général d'une série convergente.