Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
  Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.
  Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.
  Quelques **[preuves$\star$]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.
- Vous passez ensuite aux exercices.

Ch. III : Séries numériques

- *Rappels de PCSI :*
  - Série numérique, sommes partielles.
    CNS de convergence d'une série à termes positifs.
    [preuve]
    Séries géométriques $\sum_{n\geq 0}\gamma^n$,
    valeur de la somme **[preuve]**,
    nature convergente ssi $|\gamma|<1$ **[preuve]**
    Séries de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$, nature. **[preuve]**
    Séries absolument convergentes.
  - **Théorèmes de comparaison** (entre séries positives ;d'une série réelle à une série positive) :
    encadrement $|u_n|\leq v_n$, équivalent à un terme strictement positif $u_n\sim v_n>0$.
- *Compléments de PC sur les séries numériques :*
  - Théorème de **Comparaison série-intégrale**.
    Les étudiants doivent savoir encadrer $\sum_{k=1} f(k)$ à l'aide de deux intégrales **[preuve $\star$]**
  - **Règle de d'Alembert** pour une série à termes TOUS non nuls. **[preuve $\star$]**
  - **Série exponentielle** d'un complexe z : $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ est ACV, sa somme est notée $\exp(z)$.
    Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour étudier la suite des sommes partielles :
    $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x=\exp(x)$.
  - Séries alternées, **Critère spécial des séries alternées et majoration du reste** $|R_N|\leq|u_{N+1}|$.
  - **Formule de Stirling** $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ (démonstration non exigible)
  - Produit de Cauchy (démonstration non exigible) :
    si $\sum_p u_p$ et $\sum_q v_q$ sont ACV, alors la série $\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{k} u_p v_{n-p}\right)$ est ACV et sa somme est égale aux produit $\left(\sum_{p=0}^{+\infty}u_p\times\sum_{q=0}^{+\infty}v_q\right)$.

    Application :
    $\exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\exp(z_2),\quad\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$
    [preuve $\star$]

- *Exemples à connaître :*
  $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente, non grossièrement divergente. De plus la suite $(s_n)_{n\geq 1}$, définie pour $n\geq 1$ par $s_n=-\ln(n)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, est décroissante et minorée donc convergente vers une limite γ.
  $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, non absolument divergente.
  $\sum_{n\geq 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente, même si son terme général est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est lui le terme général d'une série convergente.

chap. IV : Espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces stables

- rappels de PCSI : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. **Somme directe $A\oplus B$** de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- $\boxed{\textbf{Somme } \sum_{i=1}^{s}E_i}$ de plusieurs sous-espaces vectoriels $E_1,\dots E_s$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. $\boxed{\textbf{Somme directe } \bigoplus_{i=1}^{p}E_i}$ de plusieurs s.-e.v..
- Décomposition en somme directe d'un espace vectoriel. **Base adaptée** à une somme directe.
  Relation $\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{s}E_i\right)\leq\sum_{i=1}^{s}\dim(E_i)}$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.