# chap. III : Algèbre linéaire générale

- rappels de PCSI : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. *Compétence : Savoir justifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qui le contient.*
  **Somme directe $F \oplus G$** de deux sous-espaces vectoriels de $E$, avec $F \oplus G \subset E$.
  Sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ supplémentaires dans $E$ : $F \oplus G = E$.

  vérification de la linéarité d'une application. Ecriture matricielle d'un endomorphisme explicite ;
  *Compétence : Savoir justifier qu'une application est linéaire, un endomorphisme, un isomorphisme, un automorphisme.*
- projecteurs, symétries.
- Calculs de déterminants : propriétés usuelles, déterminant d'un produit de matrices. Déterminant et caractérisation de la liberté d'un famille de vecteurs colonnes.
- **Formule de développement** par rapport à une ligne ou une colonne.
- $\boxed{\textbf{Somme } \sum_{i=1}^{s} E_i}$ de plusieurs sous-espaces vectoriels $E_1, \dots E_s$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. $E$. $\boxed{\textbf{Somme directe } \bigoplus_{i=1}^{p} E_i}$ de plusieurs s.-e.v..
- Décomposition en somme directe d'un espace vectoriel. **Base adaptée** à une somme directe.
  Relation $\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{s} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{s} \dim(F_i)}$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.
- **Sous-espace vectoriel stable** par un endomorphisme.
- $\boxed{\text{Endomorphisme induit } u_{|F}^{|F}}$ sur un sous-espace vectoriel $F$ stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. Matrice triangulaire par blocs.
- **Caractérisation matricielle s'un s.e.v. stable** : matrice dans une base adaptée à une somme directe $F \oplus G = E$ lorsque $F$ est stable par $u$.
- $F$ est stable par $u$ ssi la matrice est triangulaire par blocs dans une base adaptée **[preuve ⋆]**
- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, **$\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par $u$** **[preuves]**

  Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par $v$ **[preuves]**
- Calculs matriciel par blocs.
- Déterminants triangulaire par blocs.
- **Matrices semblables**.
  **Deux matrices semblables ont même déterminant**. **[preuves]** Déterminant d'un endomorphisme.
- **Trace** d'une matrice, d'un endomorphisme. **Linéarité, trace d'un produit, d'une transposée** ;
  *N.B. : les étudiants doivent connaître les écritures matricielles d'une application linéaire relativement à des bases ; Matrice produit et coefficients.*
- **Deux matrices semblables ont même trace**. **[preuve]**
- Espaces vectoriels produits.

*N.B. pour les colleurs : les déterminants de Vandermonde seront vus aux chapitre d'algèbre linéaire suivant lors de l'interpolation de Lagrange.*

# ch. II : Séries numériques, rappels et compléments

1. Sommes géométriques : on pourra demander à tous les étudiants un calcul de sommes géométrique $\sum_{k=p}^{q} \alpha^k$ et vérifier que l'expression admet une limite finie pour $q \to +\infty$ ssi $|\alpha| < 1$.
2. Produit de Cauchy de deux séries A.C.V.

---

# ch. IV : Suites et séries de fonctions

- **Convergence simple** : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur $I$ vers $f$ si : $\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$
- **Norme infinie** d'une fonction bornée sur un intervalle :
  $$\| \ \|_\infty^I : f \longmapsto \sup\{|f(t)|; t \in I\}$$
  Calcul explicite via l'étude des variations pour une fonction dérivable sur $I$.
- **Convergence uniforme** d'une suite de fonctions sur un intervalle.
  $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions bornées CVU sur $I$ vers $f$ si : $\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t) - f(t)|\} = \|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

*à venir : suites et séries de fonctions : la CVU implique la CVS ; propriétés de la fonction limite (simple) d'une suite de fonctions ; séries de fonctions*

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[preuve ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin et Titouan, T7 Clémentine