ch. IV : Suites et séries de fonctions

— **Convergence simple** : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si : $\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$

— **Norme infinie** d'une fonction bornée sur un intervalle :

$$\|\ \|_\infty^I : f \longmapsto \sup\{|f(t)|; t \in I\}$$

Estimation via une majoration à $n \in \mathbb{N}$ fixé de $\sup\{|f_n(t)|; t \in I\}$
Calcul explicite via l'étude des variations pour une fonction dérivable sur I.

— **Convergence uniforme** d'une suite de fonctions sur un intervalle.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions bornées CVU sur I vers f si : $\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t)-f(t)|\} = \|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

— La convergence uniforme implique la convergence simple.
[preuve ⋆] *(avec des quantificateurs* $\forall, \exists$*)*

— **Théorème de continuité de la limite** d'une suite de fonctions continues, en cas de convergence uniforme. **[preuve ⋆]**

— **Théorème d'intégration de la limite** : Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

[preuve]

— **Théorème de dérivabilité de la limite** : Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur (tout segment de) I vers g, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$
[preuve ⋆]

— extension aux dérivées successives pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

— Série de fonctions : notation $\sum_{n\geq 0} f_n$, suite $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_N$ des fonctions sommes partielles

— Convergence simple d'une série de fonctions. Notation de la fonction somme $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$.

- *Exemples à connaître :*
$\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1,+\infty[$

à venir : Séries de fonctions :CVU, et CVN; propriétés de la fonction somme d'une série de fonctions; théorème de la double limite (preuve HP, réultat absent du programme pour les suites de fonctions)

chap. III : Algèbre linéaire générale

— Déterminants triangulaire par blocs.

— **Matrices semblables**.
Deux matrices semblables ont même déterminant.
[preuves] Déterminant d'un endomorphisme.

— **Trace** d'une matrice, d'un endomorphisme. **Linéarité, trace d'un produit, d'une transposée** ;
N.B. : les étudiants doivent connaître les écritures matricielles d'une application linéaire relativement à des bases; Matrice produit et coefficients.

— **Deux matrices semblables ont même trace**.
[preuve]

— Espaces vectoriels produits.

N.B. pour les colleurs : les déterminants de Vandermonde seront vus aux chapitre d'algèbre linéaire suivant lors de l'interpolation de Lagrange.

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[preuve ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin et Titouan, T7 Clémentine