Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.
• Vous passez ensuite aux exercices.

Ch. III : Séries numériques

Révisions de PCSI

- *Rappels de PCSI :*
  - Série numérique, sommes partielles.
  - **CNS de convergence d'1 série à termes positifs.** **[preuve]**
    Séries géométriques $\sum_{n\geq 0} \gamma^n$,
    Convergence et valeur de la somme si $|\gamma| < 1$ **[preuve]**,
  - **Séries de Riemann** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, nature. **[preuve]**
  - **Séries absolument convergentes**.
  - **Théorèmes de comparaison** (entre séries positives ;d'une série réelle à une série positive) : encadrement $|u_n| \leq v_n$, équivalent à un terme strictement positif $u_n \sim v_n > 0$.
- *Compléments de PC sur les séries numériques :*
  - Théorème de **Comparaison série-intégrale**.
    Les 5/2 doivent savoir encadrer $\sum_{k=1} f(k)$ *à l'aide de deux intégrales à la main*
  - Séries alternées, **Critère spécial des séries alternées** et **majoration du reste** $|R_N| \leq |u_{N+1}|$.
  - **Règle de d'Alembert** pour une série à termes TOUS non nuls.
  - **Série exponentielle** d'un complexe z : $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est ACV, sa somme est notée $\exp(z)$.
    Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour étudier la suite des sommes partielles :
    $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \exp(x)$.
  - **Formule de Stirling** $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$
  - Produit de Cauchy (démonstration non exigible) : si $\sum_p u_p$ et $\sum_q v_q$ sont ACV, alors la série $\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{k} u_p v_{n-p}\right)$ est ACV et sa somme est égale aux produit $\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \times \sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$.
    Application :
    $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2),\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- *Exemples à connaître :*
  $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, non grossièrement divergente. De plus la suite $(s_n)_{n\geq 1}$, définie pour $n \geq 1$ par $s_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, est décroissante et minorée donc convergente vers une limite γ.
  $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, non absolument convergente.
  $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente, même si son terme général est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est lui le terme général d'une série convergente.

chap. V : Suites de fonctions

- **Convergence simple** : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si : $\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$
- **Convergence uniforme** d'une suite de fonctions sur un intervalle.
  $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions bornées CVU sur I vers f si : $\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t) - f(t)|\} = \|f_n - f\|_{\infty,I} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$
- La convergence uniforme implique la convergence simple. **[preuve pour les 5/2]**