Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

  Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

  Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

  Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

Ch. III : Séries numériques (fin)

— Produit de Cauchy (démonstration non exigible) : si $\sum_p u_p$ et $\sum_q v_q$ sont ACV, alors la série $\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{k} u_p v_{n-p}\right)$ est ACV et sa somme est égale aux produit $\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \times \sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$.

Application :

$\exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\exp(z_2),\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$ **[preuve ⋆]**

chap. IV : Espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces stables

Révisions de PCSI

Le programme de PCSI a été revu pendant les vacances. Les étudiants peuvent être interrogés sur des exercices classiques notamment :

— rappels de PCSI : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels.
Compétence : Savoir justifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qui le contient.
Somme directe $F\oplus G$ de deux sous-espaces vectoriels de E, avec $F\oplus G\subset E$.
Sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E : $F\oplus G=E$.

— vérification de la linéarité d'une application. Ecriture matricielle d'un endomorphisme explicite ;
Compétence : Savoir justifier qu'une application est linéaire, un endomorphisme, un isomorphisme, un automorphisme.

— projecteurs, symétries.

— Calculs de déterminants : propriétés usuelles, déterminant d'un produit de matrices. Déterminant et caractérisation de la liberté d'un famille de vecteurs colonnes., développements par rapport à une ligne ou une colonne.

Compléments PC

— **Somme** $\sum_{i=1}^{s} E_i$ de plusieurs sous-espaces vectoriels $E_1,\dots E_s$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. **Somme directe** $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ de plusieurs s.-e.v..

— Décomposition en somme directe d'un espace vectoriel. **Base adaptée** à une somme directe.

Relation $\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{s} E_i\right)\leq\sum_{i=1}^{s}\dim(E_i)}$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

— Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme.

Pour $u\in\mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u **[preuves]**

Pour $u,v\in\mathcal{L}(E)$ tels que $u\circ v=v\circ u$, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v **[preuves]**

— Endomorphisme induit $u\big|_{F}^{F}$ sur un sous-espace vectoriel F stable par $u\in\mathcal{L}(E)$. Matrice triangulaire par blocs.

Ecriture matricielle dans une base adaptée à une somme directe $F\oplus G=E$ lorsque F est stable par u.

F est stable par u ssi la matrice est triangulaire par blocs dans une base adaptée **[preuve ⋆]**

Calculs matriciel par blocs.

— Déterminants triangulaire par blocs.

— Matrices semblables. Deux matrices semblables ont même déterminant. Déterminant d'un endomorphisme.

— Déterminant de Vandermonde.

— Trace d'une matrice, d'un endomorphisme. Linéarité, trace d'un produit, d'une transposée ; N.B. : les étudiants doivent connaître les écritures matricielles d'une application linéaire relativement à des bases ; Matrice produit et coefficients.

— Deux matrices semblables ont même trace. **[preuve]**

— Espaces vectoriels produits.