Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.
• Vous passez ensuite aux exercices.

Ch. III : Séries numériques

— **Série exponentielle** d'un complexe z Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour étudier la suite des sommes partielles :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \exp(x)$.

— **Formule de Stirling** $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$

— Produit de Cauchy (démonstration non exigible) : Application :
$\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2),\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

• *Exemples à connaître :*
$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, non grossièrement divergente. De plus la suite $(s_n)_{n\geq 1}$, définie pour $n \geq 1$ par $s_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, est décroissante et minorée donc convergente vers une limite γ.
$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, non absolument convergente.
$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente, même si son terme général est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est lui le terme général d'une série convergente.

chap. IV : Suites et séries de fonctions

— **Convergence simple** : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si : $\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$

— **Convergence uniforme** d'une suite de fonctions sur un intervalle.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions bornées CVU sur I vers f si : $\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t)-f(t)|\} = \|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

— La convergence uniforme implique la convergence simple. **[preuve pour les 5/2]**

— **Théorème de continuité de la limite** d'une suite de fonctions continues, en cas de convergence uniforme.

— **interversion limite-intégrale** sur un segment en cas de convergence uniforme, pour des fonctions continues :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$
[preuve pour les 5/2]

— **Théorème de convergence dominée**[Admis]
Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :
i) pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** sur I ;
ii) la suite (f_n) **CVS** sur I vers f **continue par morceaux sur** I ;
iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |f_n| \leq \varphi$.
(hypothèse de domination de $(f_n)_n$ par une fonction intégrable)
Alors les fonctions $\boxed{f_n,\text{ pour } n\in\mathbb{N}, \text{ et } f \text{ sont intégrable sur } I}$, la suite $\boxed{\left(\int_I f_n\right)_{n\geq 0} \text{ converge}}$, et $\boxed{\int_I f = \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n}$.

— **Théorème de dérivation** de la limite d'une suite de fonctions :
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, qui CVS sur I vers f, et telle que la suite (f_n') de ses dérivées CVU sur I vers h. Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f' = h$.

— Série de fonctions. **Convergence simple**. Suite des fonctions sommes partielles. Fonction somme en cas de convergence simple.

— **Convergence uniforme** et **Convergence normale** d'une série de fonctions sur un intervalle.
La convergence normale implique la convergence uniforme.
La convergence uniforme implique la convergence simple.

— **Continuité de la somme** d'une série de fonctions continues qui converge uniformément.

— **Théorème d'intégration terme à terme** sur un segment avec CVU

— **Théorème d'intégration terme à terme** sur un intervalle qcq

— **Théorème de dérivation terme à terme**

• *Exemples à connaître :*
$\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1,+\infty[$
$S : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ est définie sur $]-1,1]$