ch. IV : Suites et séries de fonctions

— **Convergence simple** : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si : $\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$

— **Norme infinie** d'une fonction bornée sur un intervalle :

$$\| \ \|_\infty^I : f \longmapsto \sup\{|f(t)|; t \in I\}$$

Estimation via une majoration à $n \in \mathbb{N}$ fixé de $\sup\{|f_n(t)|; t \in I\}$
Calcul explicite via l'étude des variations pour une fonction dérivable sur I.

— **Convergence uniforme** d'une suite de fonctions sur un intervalle.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions bornées CVU sur I vers f si : $\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t)-f(t)|\} = \|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

— La convergence uniforme implique la convergence simple. **[niveau ⋆]** *(avec des quantificateurs* $\forall, \exists$*)*

— **Théorème de continuité de la limite** d'une suite de fonctions continues, en cas de convergence uniforme. **[niveau ⋆]**

— **Théorème d'intégration de la limite** : Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

[démonstration pour tous]

— **Théorème de dérivabilité de la limite** : Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur (tout segment de) I vers g, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$ **[niveau ⋆]**

— extension aux dérivées successives pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

— Série de fonctions : notation $\sum_{n\geq 0} f_n$, suite $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)_N$ des fonctions sommes partielles

— **Convergence simple** d'une série de fonctions. Notation de la fonction somme $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$.

- *Exemple à connaître :* $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1, +\infty[$

— **Convergence uniforme** d'une série de fonctions. Difficulté pratique d'étudier $\|S - S_N\|_\infty^I$.
Exemple avec utilisation du théorème spécial des séries alternées pour majorer uniformément la fontion de reste $R_N : x \mapsto \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$.

— **Convergence normale** d'une série de fonctions bornées, lorsque $\sum_{n\geq 0}\|u_n\|_\infty^I$ est une série numérique convergente.

— **Liens entres les trois notions de convergence** La convergence normale sur un intervalle implique la convergence simple. **[niveau ⋆]**
La convergence normale sur un intervalle implique la convergence uniforme.
La convergence uniforme sur un intervalle implique la convergence simple.

— **Théorème de continuité de la somme** d'une série de fonctions continues qui converge uniformément.

— **Théorème d'intégration terme à terme** sur un segment avec CVU

— **Théorème de dérivation terme à terme**

L'hypothèse de convergence uniforme sur l'intervalle I de la série des dérivées peut-être adaptée en une hypothèse plus légère de convergence uniforme sur tous les segments de l'intervalle I.

Théorème de dérivations successives terme à terme.

- *Exemple à savoir traiter :* **[pour tous]** $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$

— **Théorème de la double limite** (nouveauté du programme PC)[Admis, preuve HP]
si une série $\sum_{n\geq 0} f_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie), alors la série $\sum_{n\geq 0}\ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty}\ell_n.$$

à venir : polynômes d'endomorphismes, interpolation de Lagrange, déterminants de Vandermonde

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[pour tous]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques points **[niveau ⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[niveau ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin et Titouan, T7 Clémentine