Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

chap. IV : Espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces stables

— rappels de PCSI : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. *Compétence : Savoir justifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qui le contient.*
Somme directe $F \oplus G$ de deux sous-espaces vectoriels de E, avec $F \oplus G \subset E$.
Sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E : $F \oplus G = E$.

vérification de la linéarité d'une application. Ecriture matricielle d'un endomorphisme explicite ;
Compétence : Savoir justifier qu'une application est linéaire, un endomorphisme, un isomorphisme, un automorphisme.

— projecteurs, symétries.

— $\boxed{\textbf{Somme } \sum_{i=1}^{s} E_i}$ de plusieurs sous-espaces vectoriels $E_1, \dots E_s$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. $\boxed{\textbf{Somme directe } \bigoplus_{i=1}^{p} E_i}$ de plusieurs s.-e.v..

— Décomposition en somme directe d'un espace vectoriel. **Base adaptée** à une somme directe.
Relation $\boxed{\dim\left(\sum_{i=1}^{s} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{s} \dim(E_i)}$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

— **Sous-espace vectoriel stable** par un endomorphisme.
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Ker}(u)$ **et** $\text{Im}(u)$ **sont stables par** u **[preuves]**

Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v **[preuves]**

— $\boxed{\text{Endomorphisme induit } u_{|F}^{|F}}$ sur un sous-espace vectoriel F stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. Matrice triangulaire par blocs.

Ecriture matricielle dans une base adaptée à une somme directe $F \oplus G = E$ lorsque F est stable par u.

— F est stable par u ssi la matrice est triangulaire par blocs dans une base adaptée **[preuve ⋆]**

— Calculs matriciel par blocs.

— Calculs de déterminants : propriétés usuelles, déterminant d'un produit de matrices. Déterminant et caractérisation de la liberté d'un famille de vecteurs colonnes.

— **Formule de développement par rapport à une ligne o**

— Déterminants triangulaire par blocs.

— **Matrices semblables**.
Deux matrices semblables ont même déterminant. **[preuves]** Déterminant d'un endomorphisme.

— Déterminant de Vandermonde.

— Trace d'une matrice, d'un endomorphisme. Linéarité, trace d'un produit, d'une transposée ; N.B. : les étudiants doivent connaître les écritures matricielles d'une application linéaire relativement à des bases ; Matrice produit et coefficients.

— Deux matrices semblables ont même trace. **[preuve]**

— Espaces vectoriels produits.

chap. V : Suites de fonctions

— **Convergence simple** : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si : $\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$

— **Convergence uniforme** d'une suite de fonctions sur un intervalle.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions bornées CVU sur I vers f si : $\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t) - f(t)|\} = \|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

— La convergence uniforme implique la convergence simple. **[preuve pour les 5/2]**