

Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.
Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.
Quelques **[preuves*]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.
- Vous passez ensuite aux exercices.

chap. IV : Espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces stables

Révisions de PCSI

Compléments PC

- Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme.
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par u **[preuves]**
Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v **[preuves]**
- Endomorphisme induit $u|_F^F$ sur un sous-espace vectoriel F stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. Matrice triangulaire par blocs.
Ecriture matricielle dans une base adaptée à une somme directe $F \oplus G = E$ lorsque F est stable par u .
 F est stable par u ssi la matrice est triangulaire par blocs dans une base adaptée **[preuve *]**
Calculs matriciel par blocs.
- Déterminants triangulaire par blocs.
- Matrices semblables. Deux matrices semblables ont même déterminant. Déterminant d'un endomorphisme.
- Déterminant de Vandermonde.
- Trace d'une matrice, d'un endomorphisme. Linéarité, trace d'un produit, d'une transposée ; N.B. : les étudiants doivent connaître les écritures matricielles d'une application linéaire relativement à des bases ; Matrice produit et coefficients.
- Deux matrices semblables ont même trace. **[preuve]**
- Espaces vectoriels produits.

chap. V : Suites de fonctions

- Convergence simple : $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si :
$$\forall x \in I, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$
- Convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un intervalle.
 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions bornées CVU sur I vers f si :
$$\sup_{t \in I} \{|f_n(t) - f(t)|\} = \|f_n - f\|_{\infty, I} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$
- La convergence uniforme implique la convergence simple.
[preuve *]
- Théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions continues, en cas de convergence uniforme.
[preuve]
- intersion limite-intégrale sur un segment en cas de convergence uniforme, pour des fonctions continues :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt = \int_a^b f(t) dt$$

[preuve]
- Théorème de convergence dominée [Admis]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :
i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;
ii) la suite (f_n) CVS sur I vers f continue par morceaux sur I ;
iii) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$.
(hypothèse de domination de $(f_n)_n$ par une fonction intégrable)
Alors les fonctions f_n , pour $n \in \mathbb{N}$, et f sont intégrables sur I ,
la suite $\left(\int_I f_n \right)_{n \geq 0}$ converge, et $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$.
- Théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions :
Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , qui CVS sur I vers f , et telle que la suite (f'_n) de ses dérivées CVU sur I vers h . Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et $f' = h$.

Généralisation aux dérivées successives. Extension au cas de convergences uniformes sur tout segment.