Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une $\boxed{\text{formule}}$ encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

ch. IV : Suites et séries de fonctions

I) Suites de fonctions

— **Convergence simple** : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si : $\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$

— **Norme infinie** d'une fonction bornée sur un intervalle :
$\|\ \|_\infty^I : f \longmapsto \sup\{|f(t)|; t \in I\}$
Estimation via majoration à $n \in \mathbb{N}$ fixé de $\sup\{|f_n(t)|; t \in I\}$
Calcul explicite via l'étude des variations pour une fonction dérivable sur I.

— **Convergence uniforme** d'une suite de fonctions sur un intervalle.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions CVU sur I vers f si : $\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t) - f(t)|\} = \|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

— La convergence uniforme implique la convergence simple. **[niveau ⋆]** *(avec des quantificateurs $\forall, \exists$)*

— **Théorème de continuité de la limite** d'une suite de fonctions continues, en cas de convergence uniforme. **[niveau ⋆]**

— **Théorème d'intégration de la limite** : Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors f est continue, la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ converge et $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b(\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$
[démonstration pour tous]

— **Théorème de dérivation de la limite** : Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur (tout segment de) I vers g, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$ **[niveau ⋆]**

— extension aux dérivées successives aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

— Série de fonctions. **Convergence simple**. Suite des fonctions sommes partielles. Fonction somme en cas de convergence simple.

— **Convergence uniforme** et **Convergence normale** d'une série de fonctions sur un intervalle.
La convergence normale implique la convergence uniforme. La convergence uniforme implique la convergence simple.

— **Continuité de la somme** d'une série de fonctions continues qui converge uniformément.

— **Théorème d'intégration terme à terme** sur un segment avec CVU

II) Séries de fonctions

— Série de fonctions : notation $\sum_{n\geq 0} f_n$, suite $\left(\sum_{k=0}^{N} f_k\right)_N$ des fonctions sommes partielles

— **Convergence simple** d'une série de fonctions. Notation de la fonction somme $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$.

- *A connaître* : $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1,+\infty[$

— **Convergence uniforme** d'une série de fonctions. Difficulté pratique d'étudier $\|S - S_N\|_\infty^I$.
Utilisation pratique du théorème spécial des séries alternées pour majorer uniformément la fontion de reste $R_N : x \mapsto \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$.

— **Convergence normale** d'une série de fonctions bornées, lorsque $\sum_{n\geq 0}\|u_n\|_\infty^I$ est une série numérique convergente.

— **Liens entres les trois notions de convergence** La convergence normale sur un intervalle implique la convergence simple. **[niveau ⋆]**
La convergence normale sur un intervalle implique la convergence uniforme.
La convergence uniforme sur un intervalle implique la convergence simple.

— **Théorème de continuité de la somme**
d'une série de fonctions continues qui converge uniformément.

— **Théorème d'intégration terme à terme**
sur un segment avec CVU

— **Théorème de dérivation terme à terme**

L'hypothèse de convergence uniforme sur l'intervalle I de la série des dérivées peut-être adaptée en une hypothèse plus légère de convergence uniforme sur tous les segments de l'intervalle I.

chap. III : Algèbre linéaire générale

— **$\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par** u, $u \in \mathcal{L}(E)$ **[preuves]**

Pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v **[preuves]**

— Calculs matriciel par blocs.
vérification de la linéarité d'une application. Ecriture matricielle d'un endomorphisme explicite ;
Compétence : Savoir justifier qu'une application est linéaire, un endomorphisme, un isomorphisme, un automorphisme.

— projecteurs, symétries.

— Calculs de déterminants : propriétés usuelles, déterminant d'un produit de matrices. Déterminant et caractérisation de la liberté d'un famille de vecteurs colonnes.

— **Formule de développement** par rapport à une ligne ou une colonne.

— Déterminants triangulaire par blocs.

— **Matrices semblables**. Deux matrices semblables ont**même déterminant**. **[preuves]** Déterminant d'un endomorphisme.

— **Trace** d'une matrice, d'un endomorphisme. **Linéarité, trace d'un**
N.B. : les étudiants doivent connaître les écritures matricielles d'une application linéaire relativement à des bases ; Matrice produit et coefficients.

— **Deux matrices semblables ont même trace**. **[preuve]**

— Espaces vectoriels produits.

à venir : théorème de la double limite, dérivations successives terme à terme

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

T1 : Clémence
T2 : Louis
T3 : Ollie (Mathéïs)
T4 : Marie
T5 : Arthus, Volodymyr
T7 : Enora, Camille G.