Exercice 1 *Suite de fonctions*

1. Pour $n \geq 1$, on pose
$$f_n : t \longmapsto \frac{n}{t+(1+t^2)n}.$$
Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $I = \mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.
3. En déduire que que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n}{t+(1+t^2)n} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$

Exercice 2 *Séries de fonctions*

1. Justifier que l'on définit bien une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ikx}}{2^k}.$$
2. Déterminer l'ensemble de définition de $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$
3. Déterminer l'ensemble de définition de $\psi : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{nx}}{n!}$