Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

chap. IV : Espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces stables

— rappels de PCSI : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels.
Compétence : Savoir justifier qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel qui le contient.
Somme directe $F \oplus G$ de deux sous-espaces vectoriels de E, avec $F \oplus G \subset E$.
Sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E : $F \oplus G = E$.

vérification de la linéarité d'une application. Ecriture matricielle d'un endomorphisme explicite ;
Compétence : Savoir justifier qu'une application est linéaire, un endomorphisme, un isomorphisme, un automorphisme.

— projecteurs, symétries.

— **Matrices semblables**.
Deux matrices semblables ont même déterminant.
[preuves] Déterminant d'un endomorphisme.

— Déterminant de Vandermonde.

— Trace d'une matrice, d'un endomorphisme. Linéarité, trace d'un produit, d'une transposée ; N.B. : les étudiants doivent connaître les écritures matricielles d'une application linéaire relativement à des bases ; Matrice produit et coefficients.

— Deux matrices semblables ont même trace. **[preuve]**

— Espaces vectoriels produits.

chap. V : Suites de fonctions

— **Convergence simple** : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si : $\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$

— **Convergence uniforme** d'une suite de fonctions sur un intervalle.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions bornées CVU sur I vers f si : $\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t)-f(t)|\} = \|f_n - f\|_\infty^I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

— La convergence uniforme implique la convergence simple. **[preuve pour les 5/2]**

— **Théorème de continuité de la limite** d'une suite de fonctions continues, en cas de convergence uniforme.

— **interversion limite-intégrale** sur un segment en cas de convergence uniforme, pour des fonctions continues :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

[preuve pour les 5/2]

— **Théorème de convergence dominée**[Admis]
Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** sur I ;

ii) la suite (f_n) **CVS** sur I vers f **continue par morceaux sur** I ;

iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq \varphi$.
(hypothèse de domination de $(f_n)_n$ par une fonction intégrable)

Alors les fonctions $\boxed{f_n,\text{ pour } n \in \mathbb{N},\text{ et } f \text{ sont intégrable sur } I}$, la suite $\boxed{\left(\int_I f_n\right)_{n\geq 0} \text{ converge}}$, et $\boxed{\int_I f = \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n}$.

— **Théorème de dérivation** de la limite d'une suite de fonctions :
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, qui CVS sur I vers f, et telle que la suite (f_n') de ses dérivées CVU sur I vers h. Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f' = h$.

— extension aux dérivées successives pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.