Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

ch. V : Polynômes annulateurs ; interpolation

- Evaluation d'un polynôme en une matrice ou en un endomorphisme
- **Polynôme annulateur** d'une matrice ou d'un endomorphisme.
- **Calcul de l'inverse** à l'aide d'un polynôme annulateur (ne s'annulant pas en 0)
- **Calcul des puissances** d'une matrice via le polynôme de reste de la division euclidienne par un polynôme annulateur.
- **Polynômes d'interpolation de Lagrange** en les $(x_0,\dots,x_n)$ deux à deux distincts :
  l'unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $L_i(x_j)=\delta_i^j$ pour tous $i,j\in[\![0,n]\!]$ est $L_i=\displaystyle\prod_{0\leq k\leq n,\ k\neq i}\frac{X-x_k}{x_i-x_k}$
  [énoncé pour tous] **[preuve niveau ⋆]**
- Théorème d'interpolation : $(L_0,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et la décomposition unique d'un polynôme $P\in\mathbb{K}_n[X]$ est donnée par la formule :
  $$P=\sum_{i=0}^{n}P(a_i)L_i$$
  lemme : $(L_0,\dots,L_n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$ **[niveau ⋆]**
- Déterminants de Vandermonde.
  Formule $V_n(x_1,\dots x_n)=\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n}^{n}(x_j-x_i)$ **[pour tous]**

ch. IV : Suites et séries de fonctions

I) Suites de fonctions

- **Théorème d'intégration de la limite** : Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors f est continue, la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t=\int_a^b(\lim_{n\to+\infty}f_n(t))\ \mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$
  [démonstration pour tous]
- **Théorème de dérivation de la limite** : Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement sur I vers f et telle que la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur (tout segment de) I vers g, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'=g$ **[niveau ⋆]**
- extension aux dérivées successives aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

II) Séries de fonctions

- **Convergence simple**. Suite des fonctions sommes partielles. Fonction somme en cas de convergence simple.
- **Convergence uniforme** et **Convergence normale** d'une série de fonctions sur un intervalle.
  La convergence normale implique la convergence uniforme.
  La convergence uniforme implique la convergence simple.
- **Continuité de la somme** d'une série de fonctions continues qui converge uniformément.
- **Théorème d'intégration terme à terme** sur un segment avec CVU

II) Séries de fonctions

- Série de fonctions : notation $\displaystyle\sum_{n\geq 0}f_n$, suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N}f_k\right)_N$ des fonctions sommes partielles
- **Convergence simple** d'une série de fonctions. Notation de la fonction somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}f_k$.

- *A connaître :* $\zeta : x\longmapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1,+\infty[$
  [preuve pour tous]

- **Convergence uniforme** d'une série de fonctions. Difficulté pratique d'étudier $\|S-S_N\|_\infty^I$.
  Utilisation pratique du théorème spécial des séries alternées pour majorer uniformément la fontion de reste $R_N : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}u_n(x)$.
- **Convergence normale** d'une série de fonctions bornées, lorsque $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\|u_n\|_\infty^I$ est une série numérique convergente.
- **Liens entres les trois notions de convergence** La convergence normale sur un intervalle implique la convergence simple. **[niveau ⋆]**
  La convergence normale sur un intervalle implique la convergence uniforme.
  La convergence uniforme sur un intervalle implique la convergence simple.
- **Théorème de continuité de la somme** d'une série de fonctions continues qui converge uniformément.

- **Théorème d'intégration terme à terme** sur un segment avec CVU
- **Théorème de dérivation terme à terme**
  L'hypothèse de convergence uniforme sur l'intervalle I de la série des dérivées peut-être adaptée en une hypothèse plus légère de convergence uniforme sur tous les segments de l'intervalle I.

- *A connaître :* $\zeta : x\longmapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est ce classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$
  [preuve pour tous]

à venir : fonctions intégrables

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

T1 : Clémence
T2 : Louis
T3 : Ollie (Mathéïs)
T4 : Marie
T5 : Arthus, Volodymyr
T7 : Enora, Camille G.