Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

chap. V : Suites de fonctions

— **Convergence simple** : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers f si : $\boxed{\forall x \in I,\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$

— **Convergence uniforme** d'une suite de fonctions sur un intervalle.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions bornées CVU sur I vers f si : $\boxed{\sup_{t\in I}\{|f_n(t)-f(t)|\} = \|f_n - f\|_{\infty,I} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

— La convergence uniforme implique la convergence simple. **[preuve ⋆]**

— **Théorème de continuité de la limite** d'une suite de fonctions continues, en cas de convergence uniforme, **[preuve]**

— **interversion limite-intégrale** sur un segment en cas de convergence uniforme, pour des fonctions continues :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$
[preuve]

— **Théorème de convergence dominée**[Admis]
Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** sur I ;

ii) la suite (f_n) **CVS** sur I vers f **continue par morceaux sur** I ;

iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |f_n| \leq \varphi$.
(hypothèse de domination de $(f_n)_n$ par une fonction intégrable)

Alors les fonctions $\boxed{f_n,\text{ pour } n\in\mathbb{N}, \text{ et } f \text{ sont intégrable sur } I}$, la suite $\boxed{\left(\int_I f_n\right)_{n\geq 0} \text{ converge}}$, et $\boxed{\int_I f = \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n}$.

— **Théorème de dérivation** de la limite d'une suite de fonctions :
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, qui CVS sur I vers f, et telle que la suite (f_n') de ses dérivées CVU sur I vers h. Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f' = h$.
Généralisation aux dérivées successives. Extension au cas de convergences uniformes sur tout segment.

ch. VI : Séries de fonctions

N.B. : Les définitions, notations et énoncés de ce chapitre nécessitent des efforts de précision ; seuls les énoncés sont à connaître.

— Série de fonctions. Sommes partielles d'une série de fonctions, **Convergence simple**, fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ d'une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ qui converge simplement.

— **Convergence uniforme** d'une série de fonctions sur un intervalle.

— **Convergence normale**.
La convergence normale implique la convergence uniforme.
La convergence uniforme implique la convergence simple.

— exemple : la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} v_n$, avec $v_n : x \longmapsto x^n$ converge silmplement sur $[0,1[$, mais ne converge ni normalement ni uniformément sur $[0,1[$.

— Propriété de **continuité de la somme** :
la somme d'une série de fonctions continues qui converge uniformément est continue.

— **Intégration terme à terme sur un segment** en cas de convergence uniforme.

— **Théorème d'intégration terme à terme** sur un intervalle quelconque, avec hypothèse de convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 0}\int_I |u_n(t)|\ \mathrm{d}t$

— **Théorème de dérivation terme à terme**. *Généralisation au cas de convergence uniforme sur tout segment de la série des dérivées. Généralisation aux dérivées successives.*

— exemple : **La fonction dzêta** $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est définie sur $I =]1,+\infty[$ **[preuve]**

La fonction dzêta $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]1,+\infty[$ **[preuve ⋆]**