Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

chap. V : Suites de fonctions

— Convergence simple, uniforme.

— **Théorème de continuité de la limite** d'une suite de fonctions continues, en cas de convergence uniforme.

— **interversion limite-intégrale** sur un segment en cas de convergence uniforme, pour des fonctions continues :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

[preuve pour les 5/2]

— **Théorème de convergence dominée**[Admis]

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** sur I ;

ii) la suite (f_n) **CVS** sur I vers f **continue par morceaux sur** I ;

iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** telle que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\leq\varphi$.

(hypothèse de domination de $(f_n)_n$ par une fonction intégrable)

Alors les fonctions $\boxed{f_n\text{, pour } n\in\mathbb{N}\text{, et } f \text{ sont intégrable sur } I}$, la suite $\boxed{\left(\int_I f_n\right)_{n\geq 0} \text{ converge}}$, et $\boxed{\int_I f = \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n}$.

— **Théorème de dérivation** de la limite d'une suite de fonctions :

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, qui CVS sur I vers f, et telle que la suite (f_n') de ses dérivées CVU sur I vers h. Alors f est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $f'=h$.

— extension aux dérivées successives pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

— Série de fonctions. **Convergence simple**. Suite des fonctions sommes partielles. Fonction somme en cas de convergence simple.

— **Convergence uniforme** et **Convergence normale** d'une série de fonctions sur un intervalle.
La convergence normale implique la convergence uniforme.
La convergence uniforme implique la convergence simple.

— **Continuité de la somme** d'une série de fonctions continues qui converge uniformément.

— **Théorème d'intégration terme à terme** sur un segment avec CVU

— **Théorème d'intégration terme à terme** sur un intervalle qcq

— **Théorème de dérivation terme à terme**

• *Exemples à travailler pour illustrer le cours :*

$\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est définie sur $]1,+\infty[$

$S : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$ est définie sur $]-1,1]$