Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. V : Polynômes annulateurs ; interpolation

— Evaluation d'un polynôme en une matrice ou en un endomorphisme

— **Polynôme annulateur** d'une matrice ou d'un endomorphisme.

— **Calcul de l'inverse** à l'aide d'un polynôme annulateur (ne s'annulant pas en 0)

— **Calcul des puissances** d'une matrice via le polynôme de reste de la division euclidienne par un polynôme annulateur.

— **Polynômes d'interpolation de Lagrange** en les $(x_0, \dots, x_n)$ deux à deux distincts :
l'unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $L_i(x_j) = \delta_i^j$ pour tous $i, j \in [\![0, n]\!]$ est $L_i = \displaystyle\prod_{0\le k\le n,\ k\ne i} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$
[énoncé pour tous] **[preuve niveau ⋆]**

— Théorème d'interpolation : $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et la décomposition unique d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ est donnée par la formule :

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$$

lemme : $(L_0, \dots, L_n)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$ **[niveau ⋆]**

— Déterminants de Vandermonde.
Formule $V_n(x_1, \dots x_n) = \displaystyle\prod_{1\le i<j\le n}^{n} (x_j - x_i)$ **[pour tous]**

ch. VI : Suites et séries de fonctions intégrables

— Intégrale généralisée **absolument convergente**.

— **Fonction intégrable** sur un intervalle. Pour une fonction f intégrable sur I, on note $\displaystyle\int_I f$ la valeur de l'intégrale généralisée convergente de f sur I.

— Intégrabilité en une borne, fonctions de référence
$t \longmapsto \ln t$ est intégrable en 0.
$t \longmapsto \mathrm{e}^{-\beta t}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\beta > 0$.
$t \longmapsto t^{-\gamma}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\gamma > 1$.
$t \longmapsto t^{-\alpha}$ est intégrable en 0 ssi $\alpha < 1$.
$t \longmapsto \dfrac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable en a ssi $\alpha < 1$.

— **Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$** des fonctions intégrables (continues par morceaux).

— **Théorèmes de comparaisons ($\sim$, $O()$, $o()$)** pour l'intégrabilité.

— **Théorème de convergence dominée.**

— **Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.**

— **Condition suffisante de nullité** d'une fonction continue intégrable et d'intégrale nulle.

— **Norme** sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

— Norme $\| \ \|_1 : f \longmapsto \displaystyle\int_I |f|$ sur $L^1(I, \mathbb{K})$.
N.B. : on a déjà vu la norme infinie $\| \ \|_\infty^I$ sur l'espace $\mathcal{F}_b(I, \mathbb{K})$ des fonctions bornées sur I.

Théorème 1 (de comparaison).

Soient $I = [\alpha, \beta[$ un intervalle réel avec $\beta = \sup(I)$, $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

1. Si g est intégrable en β et si : $f(t) \underset{t\to\beta}{=} O(g(t))$, alors f est intégrable en β.
2. Si g est intégrable en β et si : $f(t) \underset{t\to\beta}{=} o(g(t))$, alors f est intégrable en β.
3. Si $f(t) \underset{t\to\beta^-}{\sim} g(t)$, f est intégrable en β si et seulement si g est intégrable en β.

Théorème 2 (de convergence dominée, admis).

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** sur I ;
ii) la suite (f_n) **converge simplement** sur I vers une fonction f **continue par morceaux sur** I ;
iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** telle que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$. (hypothèse de domination de $(f_n)_n$ par une fonction intégrable)

Alors les fonctions $\boxed{f_n,\ \text{pour } n \in \mathbb{N}, \text{ et } f \text{ sont intégrables sur } I}$, la suite $\boxed{\left(\int_I f_n\right)_{n\geq 0} \text{ converge}}$, et $\boxed{\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n}$.

Théorème 3 (d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque).

Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tels que :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est **continue par morceaux** et **intégrable** sur I ;
ii) la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ **converge simplement** sur I vers une fonction S **continue par morceaux sur** I ;
iii) la série numérique $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ converge. (hypothèse de domination)

Alors la somme S de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ $\boxed{\text{est intégrable sur } I}$, la série $\boxed{\sum_{n\geq 0} \int_I f_n \text{ converge}}$, et $\boxed{\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n}$.

à venir : fonctions intégrables

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

T1 : Clémence
T2 : Louis
T3 : Ollie (Mathéïs)
T4 : Marie
T5 : Arthus, Volodymyr
T7 : Enora, Camille G.