

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel n , on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur J .

On note alors pour tout x de J , $\varphi(x)$ sa somme.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J .
3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J .

4. Déterminer $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- 5.1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n . On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

- 5.2. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.