Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie 3, rapporté à la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$; les coordonnées d'un vecteur dans cette base sont notées (x, y, z).
L'identité sur E, notée id_E est l'application de E dans E définie par : $\forall x \in E,\ id_E(x) = x$.
f est un endomorphisme de E et A est sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
${}^tA$ est la matrice transposée de la matrice A.
$\mathcal{L}(E)$ est l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices à une colonne et 3 lignes à coefficients réels.

A) Résultat admis

On admet le résultat suivant :

lemme 1. *Il existe un plan Π de E stable par f si et seulement si il existe une matrice colonne non nulle C, $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et un scalaire λ tel que ${}^tA\ C = \lambda\ C$.*

B) Exemple numérique

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -5 & 8 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Recherche des sous-espaces-vectoriels de E stables par f.
   (a) Montrer que 2 et 4 sont valeurs propres de A, puis déterminer les sous-espaces propres de A, de ${}^tA$. *(indication : on pourra remarquer que A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique)*
   (b) Quelles sont les deux droites vectorielles de E stables par f ? *(indication : interpréter cela en termes de droites dirigées par des vecteurs propres de f)*
   (c) Déterminer les plans vectoriels de E stables par f ; on en donnera une équation cartésienne, ainsi qu'une base. *(indication : utiliser le lemme, on vérifiera que les deux plans stables sont $\Pi_2 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 - e_3, e_2 + e_3)$ et $\Pi_4 = \mathrm{Vect}(e_3, e_1 - e_2)$.)*
2. Etude de $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E);\ g \circ f = f \circ g\}$.
   (a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E dans laquelle la matrice de f est la matrice $A' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Reconnaître le sous-espace vectoriel engendré par (e'_1, e'_2).
   (indication : e'_1 et e'_3 sont des vecteurs propres de f, et le plan engendré par (e'_1, e'_2) doit être stable par f, il ne peut s'agir que de Π_2 et l'on cherchera e'_2 sous la forme $a(e_1 + e_2 - e_3) + b(e_2 + e_3)$)
   (b) Montrer que si g et f commutent, alors $\mathrm{Ker}(f - 2id_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - 4id_E)$ sont stables par g.
   (c) Montrer que si g et f commutent si et seulement si il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.
   (d) En déduire que $\mathcal{C}(f) =$ est un espace vectoriel de dimension 3 et que :
   $$\mathcal{C}(f) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(id_E, f, f^2).$$
   (indication : établir que les matrices représentant une application g telle que $g \circ f = f \circ g$ dans la base $\mathcal{B}'$ appartiennent à un R-e.v. de dimension 3. $(f^0, f, f^2) \subset \mathcal{C}(f)$ et que (f^0, f, f^2) est libre)

[Facultatif] : justification du pré-requis A)

1. Pourquoi la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de E et la base canonique (1) de $\mathbb{R}$ de la forme linéaire

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ xe_1 + ye_2 + ze_3 & \longmapsto & ax + by + cz \end{array}$$

   est-elle la matrice ligne $L = (a\ b\ c)$?

2. Soit φ une forme linéaire non nulle sur E :
   (a) Montrer que $\varphi \circ f$ est une forme linéaire sur E et que $\operatorname{Ker} \varphi$ est stable par f si et seulement si $\operatorname{Ker} \varphi \subset \operatorname{Ker}(\varphi \circ f)$
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi$ est stable par f si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.
   (indication : on pourra distinguer selon que $\varphi \circ f$ est nulle ou non, et dans le cas où elle est non nulle, on pourra utiliser le fait que deux formes linéaires non nulles de même noyau sont colinéaires)
   (c) Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi$ est stable par f si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $L\ A = \lambda\ L$, où L est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de E et la base canonique (1) de $\mathbb{R}$ de la forme linéaire φ.

3. Montrer qu'il existe un plan Π de E stable par f si et seulement si il existe une matrice colonne non nulle C, $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et un scalaire λ tel que ${}^t A\ C = \lambda\ C$.
   (indication : on pourra remarquer qu'un tel plan Π est le noyau d'une forme linéaire φ et appliquer la question précédente)