Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.
• Vous passez ensuite aux exercices.

chap. V : Réduction

— Eléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme.

— **Polynôme caractéristique** χ_u (unitaire) d'un endomorphisme u, via sa matrice A dans une base :

$$\boxed{\chi_A(x) = \det(xI_n - A)}$$
$$\boxed{\quad = x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}$$

$$\boxed{\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}$$

— Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. **[preuve pour les 5/2]**

— **multiplicité d'une valeur propre**

— Lorsque χ_A est **scindé** sur $\mathbb{K}$:

$$\boxed{\chi_A(x) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (x-\lambda)^{m_\lambda}}$$
$$\boxed{n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda}, \quad \boxed{\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \lambda^{m_\lambda}},$$
$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda \times \lambda}$$

— Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2 est libre. **[preuve pour les 5/2]**

— **Les sous-espaces propres d'un endomorphismes sont en somme directe.** **[preuve]**

— **Diagonalisabilité** d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme.

— Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, inégalités $\boxed{1 \le \dim(E_{\lambda,u}) \le m_\lambda}$ **[preuve pour les 5/2]**

— **Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité** pour un polynôme caractéristique scindé :
lorsque $E = \bigoplus E_{\lambda,u}$,
ou lorsque $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u), \dim(E_{\lambda,u}) = m_\lambda$.

— **C.S. de diagonalisabilité** lorsque le polynôme caractéristique est scindé à racines simples
les étudiants doivent connaître un contre-exemple tel $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— **Calcul des puissances** d'une matrice diagonalisable

— **Systèmes de suites récurrentes linéaires** à coefficients constants, cas diagonalisable
$V_n = \begin{pmatrix} v_{n,1} \\ \vdots \\ v_{n,p} \end{pmatrix}$ et relation $V_{n+1} = A \times V_n$
les étudiants doivent savoir en déduire une formule de la forme $V_n = PD^nP^{-1}V_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *avec* D *diagonale, lorsque* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *est diagonalisable.*

ch. VI : Equations différentielles, systèmes différentiels

— **Equation différentielle linéaire d'ordre 1** à coefficients constants, avec second membre continu :
$y' = a\ y + b(t)$ (rappel de PCSI)

— **Equation différentielle linéaire d'ordre 1** avec second membre, à coefficients continus : $y' = a(t)\ y + b(t)$ (rappel de PCSI) Pour $a : I \to \mathbb{K}$ continue, détermination des solutions sur I de (H) $y' = a(t)y$ **[preuve]**

— **Equations différentielles linéaires d'ordre 2** à coefficients constants $ay'' + by' + cy = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$

— **Système différentiel linéaire** à coefficients constants, sans second membre :

$$X'(t) = A\ X(t)$$

Résolution dans le **cas diagonal**

$$Z' = D\ Z$$

puis dans le **cas diagonalisable**, en posant $A = PDP^{-1}$ et $Z : t \longmapsto P^{-1}X(t)$

à venir :
Ecriture des solutions réelles *à l'aide des parties réelles et imaginaires des solutions complexes. Théorèmes de Cauchy-Lipschitz*