ch. VI : Fonctions intégrables

— Intégrale généralisée absolument convergente.
— Intégrabilité en une borne.

- *Exemples à savoir traiter :* **[pour tous]**

  $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$

  $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable en $+\infty$

— **Fonction intégrable** sur un intervalle.
Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables (continues par morceaux).

— **Théorèmes de comparaisons ($\sim$, $O()$, $o()$)** pour l'intégrabilité.

— **Théorème de convergence dominée.**

— **Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.**

— **Condition suffisante de nullité** d'une fonction continue intégrable et d'intégrale nulle.
— **Norme** sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

- *Exemples du programme :* formules à connaître **[pour tous]** ; démonstrations : **[niveau $\star$]**

  Norme $\| \ \|_1 : f \longmapsto \displaystyle\int_I |f|$ sur $L^1(I,\mathbb{K})$.

  Norme infinie $\| \ \|_\infty^I$ sur l'espace $\mathcal{F}_b(I,\mathbb{K})$ des fonctions bornées sur I.

ch. VI : Probabilités discrètes, variables aléatoires

— Dénombrabilités, sommabilité d'une famille discrète. Propriétés sur les familles sommables : croissance, linéarité, sommation par paquets, Fubini, produits de sommes*pas d'exercice sur ces notions, méthodes et résultats admis du programme PC*

— Univers, évènement contraire, réunion dénombrable. Tribu des évènements, espace probabilisable.

— **Ecritures ensemblistes** dévènements à l'aide de $\bigcap$ (ET) ou à l'aide de $\bigcup$ (OU)

— Loi de **Probabilité** sur Ω muni d'une tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$: application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que : i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$; ii) pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$. ($\sigma$-additivité)

— **Continuité croissante** : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

— **Continuité décroissante** : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est 1 suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

— **Propriété de sous-additivité** : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

à venir : probabilités conditionnelles, indépendances d'évènements. Bayes, probabilités totales ; Variables aléatoires discrètes.

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[pour tous]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques points **[niveau ⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[niveau ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin et Titouan, T7 Clémentine