Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
  Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.
  Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.
  Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.
  - Vous passez ensuite aux exercices.

ch. VI :Réduction

- Rappels : sous-espaces stables d'un endomorphisme ; droite stable
- **vecteur propre**, **valeur propre**, **spectre**, **sous-espaces propres** d'un endomorphisme
- **Polynôme caractéristique** χ_u (unitaire) d'un endomorphisme u, via sa matrice A dans une base :

$$\boxed{\chi_A(x) = \det(xI_n - A)}$$
$$\boxed{= x^n - \operatorname{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}$$
$$\boxed{\chi_A = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}$$

- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
- **multiplicité d'une valeur propre**
- Lorsque χ_A est **scindé** sur $\mathbb{K}$:

$$\boxed{\chi_A(x) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (x-\lambda)^{m_\lambda}}$$
$$\boxed{n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} m_\lambda}, \quad \boxed{\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda^{m_\lambda}},$$
$$\boxed{\operatorname{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} m_\lambda \times \lambda}$$

- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2 est libre. **[preuve ⋆]**
- **Les sous-espaces propres d'un endomorphismes sont en somme directe.** **[preuve ⋆]**
- **Diagonalisabilité** d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme.

  Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité pour un polynôme caractéristique scindé :
  lorsque $E = \bigoplus E_{\lambda,u}$,
  ou lorsque $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u), \dim(E_{\lambda,u}) = m_\lambda$.
- **C.S. de diagonalisabilité** (lorsque le polynôme caractéristique est scindé à racines simples)
- **Calcul des puissances** d'une matrice diagonalisable,
  d'une matrice trigonalisable
- **Trigonalisabilité**,
  Théorème de C.N.S. de trigonalisabilité : lorsque le polynôme caractéristique est scindé
  preuve non exigible
  en particulier, toute matrice carrée est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

  programme PC : « La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication. »

Exemples à connaître :
$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, pas sur $\mathbb{R}$.
$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisale sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, mais son polynôme caractéristique $\chi_T = (X-1)^2$ est scindé.
à venir la semaine suivante : suites récurrentes linéaires ; équations différentielles