Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

# ch. VIII : Réduction

— Rappels : sous-espaces stables d'un endomorphisme ; droite stable

— **vecteur propre**, **valeur propre**, **spectre**, **sous-espaces propres** d'un endomorphisme ou d'une matrice ;
Les étudiants doivent pouvoir, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, faire le lien entre l'inversibilité ou non de $\lambda \mathrm{id}_E - u$ et le fait que $\lambda$ n'est pas ou est une valeur propre.

— **$\lambda$ valeur propre de $u$ si et seulement si** $\det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0$
recherche des valeurs propres via la factorisation de $\det(x\mathrm{id}_E - u)$ ou $\det(xI_n - A)$

— **Détermination explicites de sous-espaces propres** via des résolutions de systèmes.

— **Polynôme caractéristique** $\chi_u$ (unitaire) d'un endomorphisme $u$, via sa matrice $A$ dans une base :

$$\boxed{\chi_A(x) = \det(xI_n - A)}$$
$$\boxed{\quad = x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}$$

$$\boxed{\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}$$

— Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. **[preuve ⋆]**

— **multiplicité d'une valeur propre**

— Lorsque $\chi_A$ est **scindé** sur $\mathbb{K}$ :

$$\boxed{\chi_A(x) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (x-\lambda)^{m_\lambda}}$$

$$\boxed{n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda}, \quad \boxed{\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \lambda^{m_\lambda}},$$

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda \times \lambda}$$

— Si $P$ est un polynôme annulateur de $u$ et $\lambda$ une valeur propre de $u$, alors $P(\lambda) = 0$ **[preuve ⋆]**

# ch. VI : Suites et séries de fonctions intégrables

— Intégrale généralisée **absolument convergente**.

— **Fonction intégrable** sur un intervalle. Pour une fonction $f$ intégrable sur $I$, on note $\displaystyle\int_I f$ la valeur de l'intégrale généralisée convergente de $f$ sur $I$.

— Intégrabilité en une borne, fonctions de référence
$t \longmapsto \ln t$ est intégrable en $0$.
$t \longmapsto \mathrm{e}^{-\beta t}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\beta > 0$.
$t \longmapsto t^{-\gamma}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\gamma > 1$.
$t \longmapsto t^{-\alpha}$ est intégrable en $0$ ssi $\alpha < 1$.
$t \longmapsto \dfrac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable en $a$ ssi $\alpha < 1$.

— **Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$** des fonctions intégrables (continues par morceaux).

— **Théorèmes de comparaisons ($\sim$, $O()$, $o()$)** pour l'intégrabilité.

— **Théorème de convergence dominée.**

— **Théorème d'intégration terme à terme sur un interva**

— **Condition suffisante de nullité** d'une fonction continue intégrable et d'intégrale nulle.

— **Norme** sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

— Norme $\|\ \|_1$ : $f \longmapsto \displaystyle\int_I |f|$ sur $L^1(I, \mathbb{K})$.
*N.B. : on a déjà vu la norme infinie $\|\ \|_\infty^I$ sur l'espace $\mathcal{F}_b(I, \mathbb{K})$ des fonctions bornées sur $I$.*

*à venir : fonctions intégrables*

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

T1 : Clémence
T3 : Ollie (Mathéïs)
T4 : Marie
T5 : Arthus, Volodymyr
T7 : Enora, Camille G.