I. Annales

Exercice 1 *CC-INP PC*

EXERCICE MAJEUR

Soient $a \in \mathbb{R}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \dfrac{1}{2^n}\left(a + \dfrac{1}{2^n}\right)$.

1. Déterminer a pour que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On suppose dorénavant $a = \dfrac{2}{3}$ et on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = p_n$.

2. Calculer la série génératrice $G_X(t)$ de X et préciser son rayon de convergence.

3. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

On considère une variable aléatoire Y, définie aussi sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans $\{0, 1\}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{(X=n)}(Y = 1) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

4. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

5. En déduire la loi de Y.

6. Calculer la covariance $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

Exercice mineur

Montrer que la fonction

$$f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2 t}}{1 - t + t^2}\,\mathrm{d}t$$

est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 2 *CC-INP PC*

Exercice Majeur

On considère l'application $f : \mathbb{R}[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad P \longmapsto f(P) = P(\mathrm{X}+1) - P(\mathrm{X})$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est stable par f.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et M_n la matrice de f_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

3. Donner M_3.

4. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(f)$. L'endomorphisme f est-il injectif ?

5. *a)* Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}\,(f_n)$ et $\mathrm{Im}\,(f_n)$.

b) En déduire $\mathrm{Im}\,(f)$. L'endomorphisme f est-il surjectif ?

c) Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $f(P) = \mathrm{X}^2$.

6. On note $H = \left\{ P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]\,;\, \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$.

a) Montrer que H et $\mathrm{Ker}\,(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ supplémentaires dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

b) Établir : $\forall Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \exists!\, P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad \begin{cases} P(\mathrm{X}+1) - P(\mathrm{X}) = Q(\mathrm{X}) \\ \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0. \end{cases}$

Exercice mineur

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-x-y}$.

1. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^t \geqslant 1 + t$.

2. Déterminer les extrémums locaux et les extrémums globaux de f.

Exercice 3 *CC-INP PC*

Exercice Majeur

On note E l'ensemble des fonctions $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad f(x+1)-f(x)=\frac{1}{x},\qquad f(1)=0,\qquad f \text{ est croissante sur }]0\,;+\infty[.$$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0\,;+\infty[$: $u_n(x)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{x+n}$.

1. *a)* Montrer, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$: $u_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$.

b) En déduire que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge.

On note $u :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto -\dfrac{1}{x}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Montrer que l'application u est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$.

3. Établir : $u \in E$.

4. Soient $f,g \in E$, $d=f-g$.

a) Montrer : $\begin{cases}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad d(x+n)=d(x)\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad d(n)=0.\end{cases}$

b) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0\,;1[,\quad -\dfrac{1}{n} \leqslant d(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

c) En déduire $f=g$.

5. Conclure quant à l'ensemble E.

Exercice mineur

1. CNS sur $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ pour que la matrice $M=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & b\end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$?

Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune la loi binomiale de paramètre $\left(n,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

2. Déterminer la probabilité pour que la matrice $M=\begin{pmatrix}X & 1\\ 0 & Y\end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

Notes

[1] correction :

Exercice Majeur

1. Le réel a convient si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n \geqslant 0 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n \text{ existe et est égal à } 1. \end{cases}$$

Il est clair que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n$ converge (séries géométriques) et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\left(a + \frac{1}{2^n}\right) = a\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}$$

$$= a\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = a + \frac{1}{3},$$

donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 \iff a + \frac{1}{3} = 1 \iff a = \frac{2}{3}.$$

Enfin, si $a = \frac{2}{3}$, alors les p_n sont tous $\geqslant 0$.

On conclut :

$$\boxed{\text{Il existe un réel } a \text{ et un seul convenant, } a = \frac{2}{3}}$$

2. D'après le cours, la série génératrice $G_X(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} & G_X(t) \\ = & \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)t^n \\ = & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2^n}\right)t^n \\ = & \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{t}{4}\right)^n \\ = & \frac{2}{3}\frac{t}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{2}} + \frac{t}{4}\frac{1}{1-\frac{t}{4}} \\ = & \frac{2}{3}\frac{t}{2-t} + \frac{t}{4-t}. \end{aligned}$$

Les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{3}\left(\frac{t}{2}\right)^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} t\left(\frac{t}{4}\right)^n$ sont de rayons respectifs 2 et 4, et $2 \neq 4$, donc, d'après le cours, le rayon de la série entière donnant $G_X(t)$ est le minimum de 2 et 4, donc 2.

On conclut :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La série génératrice } G_X(t) \text{ est de rayon } 2 \text{ et on a :} \\ \forall t \in]-2\,;2[, \quad G_X(t) = \dfrac{2}{3}\dfrac{t}{2-t} + \dfrac{t}{4-t} \end{array}}$$

3. D'après le cours sur les séries entières, G_X est de classe C^∞ sur $]-2\,;2[$.

En particulier, G_X est deux fois dérivable en 1, donc, d'après le cours sur les séries génératrices, $E(X)$ et $V(X)$ existent et :

$$E(X) = G'_X(1), \qquad V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'^2_X(1).$$

On calcule d'abord les dérivées première et seconde de G_X en tout point $t \in]-2\,;2[$:

$$G'_X(t) = \frac{2}{3}\frac{2}{(2-t)^2} + \frac{4}{(4-t)^2},$$

$$G''_X(t) = \frac{2}{3}\frac{4}{(2-t)^3} + \frac{8}{(4-t)^3}.$$

D'où, en prenant la valeur en $t = 1$:

$$G'_X(1) = \frac{2}{3}2 + \frac{4}{9} = \frac{16}{9},$$
$$G''_X(1) = \frac{2}{3}4 + \frac{8}{27} = \frac{80}{27},$$

puis :

$$E(X) = \frac{16}{9},$$
$$V(X) = \frac{80}{27} + \frac{16}{9} - \frac{256}{81} = \frac{128}{81}.$$

$$\boxed{E(X) = \frac{16}{9}, \qquad V(X) = \frac{128}{81}}$$

4. Le couple (X, Y) est à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \{0, 1\}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(X = n, Y = 1) &= P_{(X=n)}(Y = 1)P(X = n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^n}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{2}{3}\frac{1}{4^n} + \frac{1}{2}\frac{1}{8^n}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X = n, Y = 0) &= P(X = n) - P(X = n, Y = 1) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

5. On en déduit la loi (marginale) de Y :

$$\begin{aligned} & P(Y = 1) \\ = & \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n, Y = 1) \\ = & \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\frac{1}{4^n} + \frac{1}{2}\frac{1}{8^n}\right) \\ = & \frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{1}{8}} \\ = & \frac{1}{9} + \frac{1}{14} \\ = & \frac{23}{126} \end{aligned}$$

et

$$P(Y = 0) = 1 - P(Y = 1) = 1 - \frac{23}{126} = \frac{103}{126}.$$

On conclut :

$$\boxed{P(Y=0)=\frac{103}{126},\qquad P(Y=1)=\frac{23}{126}}$$

6. On a :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}(X,Y)\\
=\;& \sum_{n\in\mathbb{N}^*\ m\in\{0,1\}} nmP(X=n,\,Y=m)\\
=\;& \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n,\,Y=1)\\
=\;& \sum_{n=1}^{+\infty} n\Big(\frac{1}{3}\,\frac{1}{4^n}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{8^n}\Big)\\
=\;& \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\Big(\frac{1}{4}\Big)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\Big(\frac{1}{8}\Big)^n\\
=\;& \frac{1}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{\big(1-\frac{1}{4}\big)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{\big(1-\frac{1}{8}\big)^2}\\
=\;& \frac{1}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{16}{9}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,\frac{64}{49}\\
=\;& \frac{4}{27}+\frac{4}{49}=\frac{304}{1323}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X,Y)=\frac{304}{1323}}$$

Exercice mineur

1) Montrons que f est continue sir $[0\,;+\infty[$, en appliquant le théorème de continuité sous le signe intégrale.

Notons

$$F:[0\,;+\infty[\times[0\,;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},\quad (x,t)\longmapsto\frac{\mathrm{e}^{-x^2t}}{1+t+t^2}.$$

• F est continue par rapport à x (par opérations) et continue par morceaux par rapport à t, car continue par rapport à t (par opérations).

• On a :

$$\forall (x,t)\in[0\,;+\infty[\times[0\,;+\infty[,\quad |F(x,t)|=\frac{\mathrm{e}^{-x^2t}}{1+t+t^2}\leqslant\frac{1}{1+t+t^2}$$

et l'application $\varphi:t\longmapsto\dfrac{1}{1+t+t^2}$ est continue par morceaux (car continue), $\geqslant 0$, intégrable sur $[0\,;+\infty[$, car $\varphi(t)\underset{t\longrightarrow+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^2}$ et $2>1$.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, on conclut que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.

2) On a, pour tout $x\in[0\,;+\infty[$:

$$0\leqslant f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x^2t}}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\Big[\frac{\mathrm{e}^{-x^2t}}{-x^2}\Big]_0^{+\infty}=\frac{1}{x^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann en $+\infty$ $(2>1)$ et le théorème de majoration pour des fonctions $\geqslant 0$, on déduit que f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, et on conclut :

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur } [0\,;+\infty[}$$

---

[2] correction :

EXERCICE MAJEUR

1. Il est clair que f est bien une application de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

On a, pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$:

$$\begin{aligned}
& f(\alpha P_1 + P_2) \\
= \; & (\alpha P_1 + P_2)(\mathrm{X}+1) - (\alpha P_1 + P_2)(\mathrm{X}) \\
= \; & \alpha\big(P_1(\mathrm{X}+1) - P_1(\mathrm{X})\big) + \big(P_2(\mathrm{X}+1) - P_2(\mathrm{X})\big) \\
= \; & \alpha f(P_1) + f(P_2),
\end{aligned}$$

donc f est linéaire.

On conclut :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } \mathbb{R}[\mathrm{X}]}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$:

$$\deg\big(f(P)\big) \leqslant \operatorname{Max}\big(\deg(P(\mathrm{X}+1)), \deg(P)\big) \leqslant \operatorname{Max}(n, n) = n,$$

donc : $f(P) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

On conclut :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \text{ est stable par } f}$$

On peut donc, d'après le cours, considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme f_n de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, induit par f sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, défini par :

$$f : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \quad P \longmapsto f_n(P) = f(P) = P(\mathrm{X}+1) - P(\mathrm{X}).$$

3. On a :

$f_3(1) = 1 - 1 = 0,$

$f_3(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}+1) - \mathrm{X} = 1,$

$f_3(\mathrm{X}^2) = (\mathrm{X}+1)^2 - \mathrm{X}^2 = 2\mathrm{X} + 1,$

$f_3(\mathrm{X}^3) = (\mathrm{X}+1)^3 - \mathrm{X}^3 = 3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 1,$

donc la matrice M_3 de f_3 dans la base canonique $\mathcal{B}_3 = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)$ de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ est :

$$\boxed{M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

4. • ⋆ Soit $P \in \operatorname{Ker}(f)$.

On a alors $P(\mathrm{X}+1) = P(\mathrm{X})$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) = P(x).$$

En particulier, $P(1) = P(0)$, $P(2) = P(1) = P(0)$, ...

d'où, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = P(0).$$

Le polynôme $P - P(0)$ s'annule en une infinité de points (les entiers naturels), donc, d'après le cours, $P - P(0) = 0$, donc $P = P(0)$, P est constant.

$\star$ Réciproquement, il est clair que, si P est constant, alors on a $f(P) = 0$, donc $P \in \mathrm{Ker}\,(f)$.

On conclut : $\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]}$

• Puisque f est linéaire et que $\mathrm{Ker}\,(f) \neq \{0\}$, on déduit, d'après le cours : $\boxed{f \text{ n'est pas injectif}}$

5. *a)* • Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\star$ Il est clair, comme en 4., que $\mathrm{Ker}\,(f_n) = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$.

$\star$ Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $f_n(P) = P(\mathrm{X}+1) - P(\mathrm{X})$ est un polynôme de degré $\leqslant n$ et les deux termes de degré n de $P(\mathrm{X}+1)$ et $P(\mathrm{X})$ s'éliminent, donc $f_n(P)$ est de degré $\leqslant n-1$.

Il en résulte : $\mathrm{Im}\,(f_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

$\star$ De plus, d'après le théorème du rang :

$$\dim \mathrm{Im}\,(f_n) = \dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] - \dim \mathrm{Ker}\,(f_n) = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}].$$

On conclut : $\boxed{\mathrm{Im}\,(f_n) = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]}$

b) Soit $Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Il est évident qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

Comme $\mathrm{Im}\,(f_n) = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, il existe alors $P \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $Q = f_n(P)$, donc $Q = f(P)$.

Cela montre :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \ \exists\, P \in \mathbb{R}(\mathrm{X}], \quad f(P) = Q,$$

et on conclut :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}[\mathrm{X}]}$$

• D'après le résultat précédent, on déduit :

$$\boxed{f \text{ est surjectif}}$$

c) D'après l'étude précédente, X^2 admet au moins un antécédent de degré 3 par f.

En notant $P = a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2 + d\mathrm{X}^3$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\begin{aligned}
& f(P) = \mathrm{X}^2 \\
\iff \quad & P(\mathrm{X}+1) - P(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 \\
\iff \quad & \big(a + b(\mathrm{X}+1) + c(\mathrm{X}+1)^2 + d(\mathrm{X}+1)^3\big) \\
& \quad -(a + b\mathrm{X} + c\mathrm{X}^2 + d\mathrm{X}^3) = \mathrm{X}^2 \\
\iff \quad & \big(a + b(\mathrm{X}+1) + c(\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + 1) \\
& \qquad + d(\mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 1)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(a+b\mathrm{X}+c\mathrm{X}^2+d\mathrm{X}^3)=\mathrm{X}^2 \\
\iff & \begin{cases} b+c+d=0 \\ 2c+3d=0 \\ 3d=1 \end{cases} \\
\iff & \Big(d=\frac{1}{3}, \quad c=-\frac{3d}{2}=-\frac{1}{2}, \quad b=-c-d=\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

On conclut :

$$\boxed{\text{Le polynôme } \ P=\frac{1}{6}\mathrm{X}-\frac{1}{2}\mathrm{X}^2+\frac{1}{3}\mathrm{X}^3 \text{ vérifie } f(P)=\mathrm{X}^2}$$

6. *a)* • L'application

$$\varphi:\mathbb{R}(\mathrm{X})\longrightarrow\mathbb{R},\quad P\longmapsto\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$$

est linéaire, donc, comme $H=\mathrm{Ker}\,(\varphi)$, on déduit que H est un sev de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

• D'après le cours, $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sev de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

• Soit $P\in H\cap\mathrm{Ker}\,(f)$.

Comme $\mathrm{Ker}\,(f)=\mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$, P est une constante.

On a alors :

$$0=\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x=P.$$

Cela montre :

$$H\cap\mathrm{Ker}\,(f)=\{0\}.$$

• Soit $P\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Notons :

$$A=P-\int_0^1 P(x),\mathrm{d}x,\qquad B=\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x.$$

On a alors $P=A+B$, $\displaystyle\int_0^1 A(x)\,\mathrm{d}x=0$ donc $A\in H$, et B est une constante, donc $B\in\mathrm{Ker}\,(f)$.

Cela montre :

$$H+\mathrm{Ker}\,(f)=\mathbb{R}[\mathrm{X}].$$

On conclut :

$$\boxed{H \text{ et } \mathrm{Ker}\,(f) \text{ sont des sev de } \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ supplémentaires dans } \mathbb{R}[\mathrm{X}]}$$

b) Soit $Q\in\mathbb{R}(\mathrm{X})$.

• Puisque f est surjectif, il existe $P_1\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $f(P_1)=Q$.

Ensuite, il existe $P\in H$, $B\in\mathrm{Ker}\,(f)$ tels que $P_1=P+B$.

On a alors :

$$f(P)=f(P_1-B)=f(P_1)-f(B)=Q-0=Q,$$

donc P convient.

• Si deux polynômes P_1,P_2 conviennent, alors :

$$f(P_1-P_2)=f(P_1)-f(P_2)=Q-Q=0,$$

donc $P_1 - P_2 \in H \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, d'où $P_1 - P_2 = 0$, $P_1 = P_2$, ce qui montre l'unicité de P.

On conclut :

$$\boxed{\forall Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\ \exists! P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}],\quad \begin{cases} P(\mathrm{X}+1) - P(\mathrm{X}) = Q(\mathrm{X}) \\ \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0 \end{cases}}$$

Exercice mineur

1. La fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto g(t) = \mathrm{e}^t - 1 - t$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad g'(t) = \mathrm{e}^t - 1.$$

On en déduit le tableau de variations de g :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad g(t) \geqslant 0$$

et on conclut :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\quad \mathrm{e}^t \geqslant 1 + t}$$

2. • L'application f est de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, donc, si f admet un extrémum local,, c'est nécessairement en un point critique.

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} & (x, y) \text{ point critique de } f \\ \iff & \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x-y} = 0 \\ \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-x-y} = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = -x - y \\ y = -x - y \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, f admet un point critique et un seul, le point $(0, 0)$.

• On a, d'après 1, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. :

$$f(x, y) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-x-y}$$
$$\geqslant (1 + x) + (1 + y) + \big(1 + (-x - y)\big) = 3 = f(0, 0).$$

On déduit :

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ admet un extrémum local et un seul,} \\ \text{c'est en } (0,0)\text{, c'est un minimum local, sa valeur est } 3 \end{array}}$$

• Si f admet un extrémum global, alors c'est nécessairement un extrémum local, donc c'est en $(0,0)$.

De plus, le calcul ci-dessus montre qu'il s'agit alors d'un minimum global.

On conclut :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{f admet un extrémum global et un seul,}\\ \text{c'est en $(0,0)$, c'est un minimum local, sa valeur est 3}\end{array}}$$

[3] correction :

EXERCICE MAJEUR

1. *a)* On a, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ fixé :

$$u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} = \frac{x}{n(x+n)} \underset{n\infty}{\sim} \frac{x}{n^2} \geqslant 0.$$

$$\boxed{\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad u_n(x) \underset{n\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}}$$

b) D'après l'exemple de Riemann $(2>1)$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Par multiplication par la constante x, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x}{n^2}$ converge.

Par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0\,;+\infty[, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n(x) \text{ converge}}$$

2. On sait que l'application $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$.

Nous allons montrer que l'application

$$v :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

est de classe C^∞ en utilisant l'extension du théorème de dérivation pour les séries de fonctions.

• On a vu en 2. que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \longmapsto \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x+n}$

est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}k!}{(x+n)^{k+1}}.$$

• On a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad |u_n^{(k)}(x)| = \frac{k!}{(x+n)^{k+1}} \leqslant \frac{k!}{n^{k+1}},$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad ||u_n||_\infty \leqslant \frac{k!}{n^{k+1}}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($k+1>1$, car $k \in \mathbb{N}^*$), la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{k+1}}$ converge.

On en déduit, par multiplication par la constante $k!$ puis par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, que la série $\sum_{n\geqslant 1} ||u_n^{(k)}||_\infty$ converge.

Cela montre que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n^{(k)}$ converge normalement sur $]0\,;+\infty[$, donc converge uniformément sur $]0\,;+\infty[$, donc converge uniformément sur tout segment de $]0\,;+\infty[$.

D'après l'extension du théorème de dérivation pour les séries de fonctions, on déduit que v est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$ et que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\,]0\,;+\infty[,\quad v^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}k!}{(x+n)^{k+1}}.$$

Comme :

$$\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\quad u(x)=-\frac{1}{x}+v(x),$$

on conclut :

$$\boxed{u \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]0\,;+\infty[}$$

3. • On a, pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
&u(x+1)-u(x)\\
=\;&\Big(-\frac{1}{x+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x+1)\Big)-\Big(-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\Big)\\
=\;&\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n+1}\Big)-\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\Big)\Big)\\
=\;&\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\Big)\\
=\;&\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\Big).
\end{aligned}$$

Et, pour $N\geqslant 1$, par télescopage :

$$\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\Big)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+N+1}\underset{N\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{x+1}.$$

On a donc :

$$\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\quad u(x+1)-u(x)=\frac{1}{x}.$$

• On a, encore par télescopage :

$$u(1)=-1+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)=-1+1=0.$$

• D'après 2., u est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et :

$$\forall x\in\,]0\,;+\infty[,\quad u'(x)=\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^2}>0,$$

donc u est (strictement) croissante sur $]0\,;+\infty[$.

On conclut :

$$\boxed{u\in E}$$

4. *a)* • On a, pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$:

$d(x+1)=f(x+1)-g(x+1)$

$$= \Big(f(x) + \frac{1}{x}\Big) - \Big(g(x) + \frac{1}{x}\Big) = f(x) - g(x) = d(x),$$

puis, par récurrence immédiate sur n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0\,;+\infty[,\quad d(x+n) = d(x)}$$

• On a donc, en particulier, en remplaçant x par 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad d(n+1) = d(1) = f(1) - g(1) = 0 - 0 = 0.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad d(n) = 0}$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0\,;1[$.

Puisque f et g sont croissantes, on a :

$$\begin{cases} f(n) \leqslant f(x+n) \leqslant f(n+1) \\ g(n) \leqslant g(x+n) \leqslant g(n+1) \end{cases}$$

donc, par opération licite sur les inégalités :

$$f(n) - g(n+1) \leqslant f(x+n) - g(x+n) \leqslant f(n+1) - g(n),$$

c'est-à-dire, puisque $f(n) = g(n)$ d'après *a)* :

$$g(n) - g(n+1) \leqslant d(x+n) \leqslant f(n+1) - f(n),$$

donc :

$$-\frac{1}{n} \leqslant d(x+n) \leqslant \frac{1}{n},$$

et on déduit, d'après *a)* :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0\,;1[,\quad -\frac{1}{n} \leqslant d(x) \leqslant \frac{1}{n}}$$

c) Soit $x \in]0\,;1[$ fixé.

On a, d'après *b)* :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad -\frac{1}{n} \leqslant d(x) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Comme $d(x)$ ne dépend pas de n et que $-\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$ tendent vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini, on déduit $d(x) = 0$.

De plus, on a vu en *a)* : $d(1) = 0$.

On a donc :

$$\forall x \in]0\,;1],\quad d(x) = 0.$$

Enfin, d'après *a)*, d est 1-périodique.

On a donc :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad d(x) = 0$$

et on conclut :

$$\boxed{f = g}$$

5. D'après 3., on a : $u \in E$.

D'après 4., E ne contient qu'au plus un élément.

On conclut :

$$\boxed{E = \{u\}}$$

Exercice mineur

1. Puisque la matrice M est triangulaire (supérieure), les valeurs propres de M se lisent sur sa diagonale, ce sont a et b.

Si $a \neq b$, alors M est carrée d'ordre 2 et M admet deux valeurs propres distinctes, donc, d'après la condition suffisante du cours, M est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

Si $a = b$ et si M est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, alors M est semblable à $a\,\mathrm{I}_2$, donc $M = a\,\mathrm{I}_2$, contradiction avec l'élément égal à 1 de M situé à la première ligne, deuxième colonne, donc M n'est pas diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

On conclut :

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable dans } \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } a \neq b}$$

2. Notons E l'événement

« la matrice M est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ ».

D'après 1., on a : $E = (X \neq Y)$,

donc : $P(E) = P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y)$.

Puisque X et Y sont à valeurs dans $\{0, ..., n\}$, on a l'égalité d'événements :

$$(X = Y) = \bigcup_{k=0}^{n} (X = k) \cap (Y = k),$$

d'où, par incompatibilité deux à deux, lorsque k varie de 0 à n, des événements $(X = k) \cap (Y = k)$:

$$P(E) = \sum_{k=0}^{n} P\big((X = k) \cap (Y = k)\big),$$

puis, par indépendance de X et Y :

$$P(E) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right)^2 = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

D'après un exercice classique, en égalant les coefficients de X^n dans l'égalité de polynômes

$$(1+\mathrm{X})^n(1+\mathrm{X})^n = (1+\mathrm{X})^{2n},$$

on déduit :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

On a :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La probabilité pour que la matrice } M \\ \text{soit diagonalisable dans } \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \\ \text{est } 1 - \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}\end{array}}$$