I. Annales

Exercice 1

Exercice Majeur

On admet : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que l'application $\varphi :]-\infty\,;1[\longrightarrow \mathbb{R},\quad t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

est continue sur $]-\infty\,;1[$.

2. Montrer que, pour tout $x \in [-1\,;1]$, l'intégrale $L(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

3. *a)* Établir : $\forall x \in [-1\,;1],\quad L(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

b) Calculer $L(1)$ et $L(-1)$.

4. Établir :

$$\forall x \in [-1\,;1],\quad L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2).$$

5. *a)* Montrer :

$$\forall x \in]0\,;1[,\quad L(x) + L(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x).$$

b) Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$.

Exercice mineur

1. CNS sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour qu'il existe une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad P(X = n) = \frac{an+b}{2^n}.$$

On suppose désormais cette condition réalisée et on considère une telle variable aléatoire X.

2. Calculer l'espérance $E(X)$ en fonction de (a,b).

3. Déterminer (a,b) pour que $E(X)$ soit maximale et calculer alors cette valeur maximale.

Exercice 2

Exercice Majeur

Soient $f, g : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et à valeurs > 0, $M = ||f||_\infty$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad I_n = \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)\big)^n g(t)\,\mathrm{d}t.$

1. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} \leqslant M I_n.$

2. Démontrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n > 0.$

3. En utilisant l'inégalité de Cauchy et Schwarz, établir : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1}^2 \leqslant I_n I_{n+2}.$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n = \dfrac{I_{n+1}}{I_n}.$

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note L sa limite.

5. Démontrer : $\quad (I_n)^{1/n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} M.$

6. On admet le résultat suivant (moyenne de Césaro) : si une suite réelle $(w_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ, alors la suite de terme général $\dfrac{1}{n}(w_1 + \cdots + w_n)$ converge aussi vers ℓ.
En déduire L.

Exercice mineur

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$, $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose : $\quad \mathrm{rg}\,(A) = 2, \quad \mathrm{tr}\,(A) = 0, \quad A - \mathrm{I}_n$ non inversible.

1. Déterminer les valeurs propres de A et leurs ordres de multiplicité.

2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 3

EXERCICE MAJEUR

On note, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ et sous réserve d'existence : $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$.

2. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.

3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k \ln t\,\mathrm{d}t$ existe et calculer I_k.

4. Justifier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

5. Montrer : $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

6. Donner une méthode pour calculer I à 10^{-2} près.

7. Établir que f est prolongeable par continuité en 0.
Ce prolongement, encore noté f, est-il dérivable en 0 ?

8. Former le développement limité à l'ordre 3 en 1 de f.
Tracer l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de 1.

Exercice mineur

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim(E)$, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) = \mathrm{rg}\,(g) \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}\,(f \circ g) = \mathrm{rg}\,(f).$$

1. Montrer : $\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{Im}\,(g)$ et $\mathrm{Im}\,(f \circ g) = \mathrm{Im}\,(f)$.

2. Établir : $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Im}\,(g) + \mathrm{Ker}\,(f) = E$.

Notes

[1] correction :

Exercice Majeur

1. L'application φ est continue en tout point de $]-\infty\,;0[\cup]0\,;1[$ par théorèmes généraux.

En 0 : $\quad \varphi(t) = \dfrac{-\ln(1-t)}{t} \underset{t\,\longrightarrow\,0}{\sim} \dfrac{-(-t)}{t} = 1,$

d'où : $\quad \varphi(t) \underset{t\,\longrightarrow\,0}{\longrightarrow} 1 = \varphi(0),$

donc φ est continue en 0.

On conclut : $\boxed{\varphi \text{ est continue sur }]-\infty\,;1[}$

2. Puisque φ est continue sur $]-\infty\,;1[$, il s'ensuit que, pour tout $x \in [-1\,;1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment, donc $L(x)$ existe.

En 1 : $\quad \varphi(t) = \dfrac{-\ln(1-t)}{t} \underset{t\,\longrightarrow\,1}{\sim} -\ln(1-t) \geqslant 0.$

D'après le cours, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \ln u\,\mathrm{d}u$ converge.

Par le changement de variable $t = 1-u$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Par multiplication par la constante -1, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 -\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Par théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc $L(1)$ existe.

On conclut :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1\,;1], \text{ l'intégrale } L(x) = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe}}$$

3. *a)* On a, pour tout $t \in]-1\,;1[-\{0\}$:

$$\varphi(t) = \frac{-\ln(1-t)}{t} = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{n}.$$

De plus, $\varphi(0) = 1$ et le terme constant de la série entière précédente est égal à 1.

On a donc : $\quad \forall t \in]-1\,;1[, \quad \varphi(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{n}.$

Soit $x \in [-1\,;1]$ fixé.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\; f_n : [0\,;x[\longrightarrow \mathbb{R}, \;\; t \longmapsto \dfrac{t^{n-1}}{n},$

où $[0\,;x[$ désigne l'intervalle joignant 0 (compris) et x (exclu).

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est intégrable sur $[0\,;x[$, évident.

• La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0\,;x[$, vu ci-dessus.

• La fonction $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ qui est la fonction φ, est continue par morceaux sur $[0\,;x[$, car continue sur $[-1\,;1]$.

• On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\int_0^x |f_n(t)|\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^x \frac{t^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\left[\frac{t^n}{n^2}\right]_0^x\right| = \left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann $(2>1)$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge.

Par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left|\int_0^x |f_n(t)|\,\mathrm{d}t\right|$ converge.

D'après le théorème de permutation intégrale-série, on a donc :

$$L(x) = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{t^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}.$$

On conclut : $\boxed{\forall x \in [-1\,;1],\quad L(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}}$

b) • D'après 3. *a)*, en remplaçant x par 1, et d'après le résultat admis dans l'énoncé, on a :

$$\boxed{L(1) = \frac{\pi^2}{6}}$$

• D'après 3.*a)*, en remplaçant x par -1, on a :

$$L(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs :

$$\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{2N+1}\frac{(-1)^n}{n^2} = 2\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p^2},$$

d'où, en faisant tendre l'entier N vers l'infini :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2},$$

donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}.$

On conclut : $\boxed{L(-1) = -\dfrac{\pi^2}{12}}$

4. La fonction $U : x \longmapsto L(x) + L(-x) - \dfrac{1}{2}L(x^2)$

est continue sur $[-1\,;1]$ (par opérations), dérivable sur $]-1\,;1[$ (par opérations) et on a, pour tout $x \in]-1\,;1[$:

$$U'(x) = L'(x) - L'(-x) - \frac{1}{2}2xL(x^2),$$

d'où, si $x \neq 0$:

$$U'(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x} - \frac{-\ln(1+x)}{-x} - x\frac{-\ln(1-x^2)}{x^2} = 0,$$

et, si $x = 0$: $\quad U'(x) = \varphi(0) - \varphi(0) - 0\varphi(0) = 0.$

Cela montre : $\quad \forall x \in]-1\,;1[,\quad U'(x) = 0.$

Il en résulte que U est constante sur $[-1\,;1]$.

Comme : $\quad U(0) = L(0) + L(0) - \dfrac{1}{2}L(0) = \dfrac{3}{2}L(0) = 0,$

on déduit : $\quad \forall x \in [-1\,;1],\quad U(x) = 0,$

et on conclut :

$$\boxed{\forall x \in [-1\,;1],\quad L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)}$$

5. *a)* La fonction

$$V :]0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto L(x) + L(1-x) + \ln x \ln(1-x)$$

est dérivable sur $]0\,;1[$ (par opérations) et on a, pour tout $x \in]0\,;1[$:

$$V'(x) = L'(x) - L'(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) - (\ln x)\frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{-\ln(1-x)}{x} - \frac{-\ln x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} = 0,$$

donc V est constante sur $]0\,;1[$.

On a, quand x tend vers 0, par prépondérance classique :

$$\ln x \ln(1-x) \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} (\ln x)(-x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0,$$

donc $\quad V(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} L(0) + L(1) + 0 = \dfrac{\pi^2}{6}.$

On déduit que V est constante égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$, donc :

$$\boxed{\forall x \in]0\,;1[,\quad L(x) + L(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x)}$$

b) En remplaçant x par $\dfrac{1}{2}$ dans le résultat précédent, on obtient :

$$L\Big(\frac{1}{2}\Big) + L\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi^2}{6} - \Big(\ln\frac{1}{2}\Big)\Big(\ln\frac{1}{2}\Big),$$

donc : $\quad L\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{(\ln 2)^2}{2}.$

Et, d'après 3. *a)* : $\quad L\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}.$

On conclut : $\quad \boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}}$

Exercice mineur

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé.

On a :

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{an+b}{2^n} \geqslant 0\Big) \iff \big(\forall n \in \mathbb{N}, \quad an+b \geqslant 0\big).$$

⋆ Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, alors il est clair que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad an+b \geqslant 0.$$

⋆ Réciproquement, supposons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad an+b \geqslant 0.$$

En remplaçant n par 0, on déduit : $b \geqslant 0$.

D'autre part :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a + \frac{b}{n} \geqslant 0,$$

donc, en faisant tendre l'entier n vers l'infini, on déduit : $a \geqslant 0$.

• La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{an+b}{2^n}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{an+b}{2^n} = a\sum_{n=0}^{+\infty} n\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + b\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$

$$= a\frac{1}{2}\frac{1}{\Big(1-\frac{1}{2}\Big)^2} + b\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = a\frac{1}{2}4 + b2 = 2a+2b.$$

On conclut :

$$\boxed{\text{La CNS cherchée est : } a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0, \quad a+b = \frac{1}{2}}$$

2. On a donc :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{an+b}{2^n} = a\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + b\sum_{n=0}^{+\infty} n\Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$

$$= a\frac{\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}\Big)}{\Big(1-\frac{1}{2}\Big)^3} + b\frac{1}{2}\frac{1}{\Big(1-\frac{1}{2}\Big)^2} = a\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}} + b\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{4}} = 6a+2b.$$

$$\boxed{E(X) = 6a+2b}$$

3. En prenant a comme paramètre, on a $a \in \Big[0\,;\frac{1}{2}\Big]$ et $b = \frac{1}{2} - a$, donc :

$$E(X) = 6a + 2\Big(\frac{1}{2} - a\Big) = 4a+1,$$

et on conclut :

$$\boxed{E(X) \text{ est maximale pour } a = \frac{1}{2} \text{ et cette valeur maximale est } 3}$$

[2] correction :

Exercice Majeur

1. D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} = \int_0^1 \big(f(t)\big)^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 f(t)\big[\big(f(t)\big)^n g(t)\big]\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 M\big(f(t)\big)^n g(t)\,\mathrm{d}t = MI_n.$$

On conclut : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad I_{n+1} \leqslant MI_n}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

L'application $f^n g$ est continue, à valeurs $\geqslant 0$ et n'est pas l'application nulle, donc, d'après le cours :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad I_n > 0}$$

3. Rappelons l'inégalité de Cauchy et Schwarz, pour toutes applications continues $u, v : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\Big(\int_0^1 uv\Big)^2 \leqslant \Big(\int_0^1 u^2\Big)\Big(\int_0^1 v^2\Big).$$

On prend ici : $u = (f^n g)^{1/2},\ v = (f^{n+2} g)^{1/2}$,

donc : $uv = f^{n+1} g,\quad u^2 = f^n g,\quad v^2 = f^{n+2} g$,

d'où l'inégalité demandée :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad I_{n+1}^2 \leqslant I_n I_{n+2}}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ existe, car I_n et I_{n+1} sont > 0.

On a, d'après 3., pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+2}}{I_{n+1}} = u_{n+1},$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

D'autre part, d'après 1. on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant M,$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M.

D'après le cours, on en déduit :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$$

On note $L = \lim\limits_{n\infty} u_n$.

5. Puisque la fonction f est continue sur le segment $[0\,;1]$, on déduit, d'après le cours, que f est bornée (déjà utilisé en 1.) et que f atteint ses bornes.

En particulier, il existe $t_0 \in [0\,;1]$ tel que $f(t_0) = \operatorname*{Sup}\limits_{t\in[0;1]} f(t)$.

Comme f est à valeurs $\geqslant 0$, on a donc :

$$f(t_0) = ||f||_\infty = M.$$

Notons $\mu = \underset{t\in[;1]}{\mathrm{Inf}}\, f(t) > 0$.

Soit $\varepsilon \in]0\,;f(t_0)[$ fixé.

Puisque f est continue en t_0, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0\,;1],\quad \big(|t-t_0| \leqslant \eta \implies |f(t)-f(t_0)| \leqslant \varepsilon\big).$$

On a donc :

$$\forall t \in [0\,;1] \cap [t_0-\eta\,;t_0+\eta],\quad f(t) \geqslant f(t_0)-\varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} 0 < I_n = \displaystyle\int_0^1 f^n g \leqslant \int_0^1 M^n g = M^n \int_0^1 g \\ I_n = \displaystyle\int_0^1 f^n g \geqslant \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} f^n g \geqslant \eta\mu(M-\varepsilon)^n \end{cases}$$

donc : $\qquad (\eta\mu)^{1/n}(M-\varepsilon) \leqslant I_n^{1/n} \leqslant \Big(\displaystyle\int_0^1 g\Big)^{1/n} M.$

Comme :

$$\begin{cases} (\eta\mu)^{1/n}(M-\varepsilon) \underset{n\infty}{\longrightarrow} M-\varepsilon \\ \Big(\displaystyle\int_0^1 g\Big)^{1/n} M \underset{n\infty}{\longrightarrow} M \end{cases}$$

il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$:

$$\begin{cases} (\eta\mu)^{1/n}(M-\varepsilon) \geqslant M-2\varepsilon \\ \Big(\displaystyle\int_0^1 g\Big)^{1/n} M \leqslant M+\varepsilon. \end{cases}$$

On a donc : $\qquad \forall n \geqslant N,\quad M-2\varepsilon \leqslant I_n^{1/n} \leqslant M+\varepsilon.$

On a montré, en revenant à la définition d'une limite finie :

$$\boxed{I_n^{1/n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} M}$$

6. • Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \ln I_n$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.

On a, d'après 2. : $\quad w_n = \ln \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln L.$

D'après le résultat admis dans l'énoncé, on déduit :

$$\frac{1}{n}(w_1 + \cdots + w_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln L,$$

c'est-à-dire : $\qquad \dfrac{1}{n}(v_{n+1}-v_0) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln L.$

Il en résulte :

$$\frac{1}{n}v_{n+1} = \frac{1}{n}(v_{n+1}-v_0) + \frac{v_0}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln L + 0 = \ln L,$$

puis : $\qquad \dfrac{1}{n+1}v_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\,\dfrac{1}{n}v_{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln L,$

donc, par décalage de l'indice : $\quad \dfrac{v_n}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln L,$

puis, en prenant l'exponentielle :

$$I_n^{1/n} = \exp\Big(\frac{1}{n}\ln I_n\Big) = \exp\Big(\frac{v_n}{n}\Big) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \exp(\ln L) = L.$$

On conclut : $\boxed{I_n^{1/n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} L}$

• On a vu en 4. : $I_n^{1/n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} M$, d'où, par unicité de la limite :

$$\boxed{L = M}$$

$\boxed{\textit{Exercice mineur}}$

1. • Puisque $\operatorname{rg}(A) = 2$, on a, par le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Ker}(A) = n - \operatorname{rg}(A) = n - 2 \geqslant 3 - 2 = 1 > 0,$$

donc $\operatorname{Ker}(A) \neq \{0\}$.

Cela montre que 0 est valeur propre de A et que la dimension du sous-espace propre associé est $n-2$.

Puisque $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$, donc il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-2}(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

• Puisque $A - \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible, 1 est valeur propre de A, donc, à l'ordre près, $\lambda_1 = 1$.

• Puisque la somme des valeurs propres de A est égale à la trace de A, on a :

$$(n-2)\cdot 0 + 1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 = \operatorname{tr}(A) = 0,$$

donc : $\lambda_2 = -\lambda_1 = -1$.

On conclut :

Les valeurs propres de A, avec leurs ordres de multiplicité, sont : $0 \ (n-2), \quad 1 \ (1), \quad -1 \ (1)$

2. Les réels 1 et -1 sont valeurs propres de A d'ordre de multiplicité 1, donc, d'après le cours, les dimensions des deux sous-espaces propres associés sont égales à 1.

Pour la valeur propre 0, la dimension du sous-espace propre associé est $n-2$ et l'ordre de multiplicité est $n-2$.

Ainsi, le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$ et, pour chaque valeur propre de A, la dimension du sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité.

On conclut, d'après le cours :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathbf{M}_n(\mathbb{C})}$$

[3] correction :

$\boxed{\textsc{Exercice Majeur}}$

1. Soit $x \in]0\,;+\infty[$.

La fonction $g : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[x\,;1]$ (si $x \leqslant 1$), sur le segment $[1\,;x]$ (si $x \geqslant 1$), donc $f(x)$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

On conclut : $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur }]0\,;+\infty[}$

2. D'après le cours, puisque g est continue sur $]0\,;+\infty[$, f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et : $\quad \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

Par opérations, f' est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$, donc f est de classe C^2 sur $]0\,;+\infty[$, et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x\ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

L'application $t \longmapsto t^k \ln t$ est continue sur $]0\,;1]$.

On a, pour tout $\varepsilon \in]0\,;1[$, par intégration par parties pour des fonctions de classe C^1 sur un segment :

$$\int_\varepsilon^1 t^k \ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{k+1}}{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 t^k\,\mathrm{d}t = -\frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1} - \frac{1}{k+1}\,\frac{1-\varepsilon^{k+1}}{k+1}.$$

En faisant tendre ε vers 0, on déduit, par prépondérance classique : $\quad I_k = -\dfrac{1}{(k+1)^2}$.

On conclut : $\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } I_k = \int_0^1 t^k \ln t\,\mathrm{d}t \text{ existe et est égale à } -\dfrac{1}{(k+1)^2}}$

4. La fonction $g : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0\,;1]$.

On a : $\quad f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \ln t \leqslant 0$.

D'après le cours, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge.

Par multiplication par la constante -1, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 -\ln t\,\mathrm{d}t$ converge.

Par théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 -g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Par multiplication par la constante -1, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On conclut : $\boxed{I = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ existe}}$

5. On a, par la série géométrique :

$$\forall t \in [0\,;1[, \quad \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-t^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n},$$

donc : $\quad \forall t \in]0\,;1[, \quad \dfrac{\ln t}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\ln t.$

Nous allons appliquer le théorème de permutation série-intégrale.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n :]0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto (-1)^n t^{2n} \ln t.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0\,;1[$, cf. 3.

- La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0\,;1[$, vu ci-dessus.

- La fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$, qui est la fonction g, est continue par morceaux, car continue, sur $]0\,;1[$.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = -I_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2} \geqslant 0.$$

D'après l'exemple de Riemann $(2 > 1)$ et le théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

D'après le théorème de permutation série-intégrale, on a donc :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

On conclut : $\boxed{I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}}$

6. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ relève du TSCSA, car cette série est alternée et la valeur absolue de son terme général, qui est $\frac{1}{(2n+1)^2}$, est décroissante et de limite 0.

On a donc, d'après le cours, en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n le reste d'ordre n de cette série :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leqslant \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)^2} \right| = \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Donc :

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{2}10^{-2} \Longleftarrow \frac{1}{(2n+3)^2} \leqslant \frac{1}{2}10^{-2} \Longleftarrow (4n+3)^2 \geqslant 200$$

$$\Longleftarrow 42+3 \geqslant \sqrt{200} \Longleftarrow 2n+3 \geqslant 15 \Longleftarrow 2n \geqslant 12 \Longleftarrow n \geqslant 6.$$

Ainsi, $S_6 = \sum\limits_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ est une valeur approchée de I à $\frac{1}{2}10^{-2}$ près.

Et : $\quad S_3 = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} \simeq 0.908\,481.$

On conclut :

$\boxed{\text{Une valeur approchée décimale de } I \text{ à } 10^{-3} \text{ près est } 0,91}$

7. • On a vu en 4. que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Cela signifie que la fonction f admet une limite finie en 0, donc :

$$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0, \text{ par } f(0) = I}$$

• On a vu en 2. : $\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$,

donc : $f'(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} -\infty$.

Il en résulte, d'après le théorème limite de la dérivée lorsque cette limite est infinie :

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$$

8. • Notons $t = x - 1$, de sorte que $t \underset{x \longrightarrow 1}{\longrightarrow} 0$.

On a, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\ln x}{1+x^2} \\
&= \frac{\ln(1+t)}{1+(1+t)^2} \\
&= \frac{\ln(1+t)}{2+2t+t^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1+t+\frac{t^2}{2}}\ln(1+t) \\
&= \frac{1}{2}\big(1-t+o(t)\big)\Big(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(t-\frac{3}{2}t^2+o(t^2)\Big) \\
&= \frac{1}{2}t-\frac{3}{4}t^2+o(t^2).
\end{aligned}$$

On déduit, par primitivation :

$$f(x) = \underbrace{f(1)}_{=0} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{2} - \frac{3}{4}\frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

et on conclut :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Le développement limité à l'ordre } 3 \text{ en } 1 \text{ de } f \text{ est :}\\ f(x) = \dfrac{1}{4}(x-1)^2 - \dfrac{1}{4}(x-1)^3 + \underset{x \longrightarrow 1}{o}\big((x-1)^3\big)\end{array}}$$

• *Allure de la courbe représentative de f au voisinage de 1 :*

Exercice mineur

1. • ⋆ Soit $y \in \mathrm{Im}\,(g \circ f)$.

Il existe $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$, donc $y \in \mathrm{Im}\,(g)$.

Cela montre : $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$.

⋆ De plus, d'après l'énoncé :

$$\dim \mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{rg}\,(g \circ f) = \mathrm{rg}\,(g) = \dim \mathrm{Im}\,(g).$$

On conclut :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{Im}\,(g)}$$

• Comme f et g ont des rôles symétriques dans les hypothèses, on a aussi :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f \circ g) = \mathrm{Im}\,(f)}$$

2. • Soit $x \in E$.

On a : $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f \circ g)$.

Il existe donc $u \in E$ tel que : $f(x) = (f \circ g)(u)$.

On a alors : $f\big(x - g(u)\big) = f(x) - f\big(g(u)\big) = 0,$

donc $x - g(u) \in \mathrm{Ker}\,(f)$.

Ainsi :

$$x = g(u) + \big(x - g(u)\big), \quad g(u) \in \mathrm{Im}\,(g), \quad x - g(u) \in \mathrm{Ker}\,(f),$$

donc : $x \in \mathrm{Im}\,(g) + \mathrm{Ker}\,(f)$.

Cela montre :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(g) + \mathrm{Ker}\,(f) = E}$$

• Par rôles symétriques de f et g, on a aussi :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g) = E}$$