Exercice 1

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ défini par :

$$\varphi(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

1. Comparer le degré de P et celui de $\varphi(P)$.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. Etudier la surjectivité de φ.

Exercice 2

Montrer que la série $\sum u_n$ de terme général

$$u_n = \ln(2n + (-1)^n) - \ln(2n)$$

est convergente mais pas absolument convergente.

Exercice 3

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u^2) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id}_E)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \neq \mathrm{Ker}(u^2)$.
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?
4. Déterminer les endomorphismes v qui commutent avec u.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$$

.

1. Montrer que $u_n \longrightarrow 0$.
2. Quelle est la limite de nu_n ?
3. Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 5

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 6

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + t^n\right)\, \mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite de la suite (I_n).
2. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, \mathrm{d}u$
3. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12n}$.

Exercice 7

1. Justifier l'existence de
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t$$
2. Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer que $\displaystyle I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 8

On lance n fois un dé à six faces non pipé.

On note X_k le numéro obtenu au k^e lancer, $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $m_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Donner la loi de X_k et sa fonction de répartition F.
2. Exprimer la fonction de répartition F_n de M_n en fonction de F.
3. Etudier la convergence de la suite (F_n).
4. Déterminer la fonction de répartition f_n de m_n.

Exercice 9

Soit $\displaystyle F : \lambda \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{x}\mathrm{d}x$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$, et calculer F' puis F.
3. En déduire, pour $a, b > 0$ la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$.

Exercice 10

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :
$$f(M) = AM$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. L'endomorphisme f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. Le noyau et l'image de f sont-ils supplémentaires ?

Exercice 11

Etudier la convergence simple et uniforme sur $[-1, 1]$ de la suite (f_n) de fonctions définie par :
$$f_n : x \longmapsto \sin(nx\mathrm{e}^{-nx^2})$$

Exercice 12

On lance n fois un dé à six faces non pipé. On note X_k le numéro obtenu au k^e lancer, $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $m_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Donner la loi de X_k et sa fonction de répartition F.
2. Exprimer la fonction de répartition F_n de M_n en fonction de F.
3. Etudier la convergence de la suite (F_n).
4. Déterminer la fonction de répartition f_n de m_n.