Mines-Telecom PC (30 min, sans préparation)

Exercice 1

Soit deux urnes : la première contient 2 boules blanches et 3 boules noires et la seconde 4 blanches et 3 noires.

On choisit une urne au hasard et on réalise un tirage avec remise : si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne 1 sinon dans l'urne 2.

Soit l'événement : B_n : "tirer une boule blanche au n^{ime} tirage" et $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Calculer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Calculer p_n en fonction de n.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ une base de E, u un endomorphisme de E et A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

1. Donner la définition d'un endomorphisme diagonalisable et la conséquence sur A de cette propriété de u.
2. Donner une caractérisation de la diagonalisabilité de u.
3. On suppose que u est diagonalisable et que $u^4 = \mathrm{Id}_E$. Montrer que u est une symétrie.
4. On suppose de plus que la trace de u vaut $n-2$, où n est la dimension de E. Quel complément peut-on apporter à la propriété démontrée à la question précédente ?

Exercice 3

On définit f par $f(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est développable en série entière.
2. Montrer que f est solution d'une ED linéaire d'ordre 1.
3. Donner le développement en série entière de f.

Exercice 4

Calculer la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k U_{n-k}$.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

Un animal se déplace entre trois points d'eau A, B et C. À l'instant $t = 0$, il se trouve en A. Lorsqu'il a bu toute l'eau d'un point, il se déplace vers l'un des deux autres avec la même probabilité. On considère que l'eau se régénère après qu'il soit parti du point d'eau. On note

$a_n = P(\text{"l'animal est en } A \text{ à } t = n\text{"})$
$b_n = P(\text{"l'animal est en } B \text{ à } t = n\text{"})$
$c_n = P(\text{"l'animal est en } C \text{ à } t = n\text{"})$.

1. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n. De même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
2. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Justifier que A est diagonalisable.
   (b) Justifier que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A.
   (c) Trouver D diagonale et P inversible telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n.

Mines-Télécom 2de série ou spécifique (25 min préparation, 25 min passage)

Question de cours (5pts) :

a) Enoncer la règle de D'Alembert pour les séries numériques.

b) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$.

c) Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n \ln n}{n}$, pour $x > 0$.

Exercice (15 pts)

Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les sous-espaces propres de A.
3. Résoudre le système $Z' = AZ$ d'inconnue $Z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Calculer A^n.
5. Nature de la suite (A^n), pour $n \longrightarrow +\infty$?

Mines-Ponts PC (15 min préparation, 60 min passage)

Exercice 7

On lance une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est p. On note A_n : "au $n$ième lancé on fait pour la première fois deux piles consécutifs". On note a_n la probabilité de cet évènement.

1. Calculer a_1, a_2, a_3.
2. Trouver une relation reliant a_{n+2} à a_{n+1} et a_n.
3. Pourquoi est-il quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs ?

Exercice 8

Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On suppose $u \circ v = v \circ u$ et v nilpotent.

1. Montrer que $u + v$ est inversible si et seulement si u est inversible.
2. Montrer que, si u est inversible, $\det(u + v) = \det u$.

Exercice 9

On note pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n \tan x \,\mathrm{d}x$. Déterminer la limite α de la suite (I_n) et donner un équivalent de $I_n - \alpha$.

Exercice 10

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha/n \\ \alpha/n & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A_n est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? Déterminer ses éléments propres.
2. On pose $z_n = 1 + \mathrm{i}\alpha/n$ et $u_n = (z_n)^n$.
   (a) Montrer que z_n possède un argument θ_n dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   (b) Trouver un équivalent de θ_n quand n tend vers $+\infty$.
   (c) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Étudier la convergence de la suite de matrices $(A_n^n)_{n\geqslant 1}$. Interprétation géométrique.

Exercice 11

Résoudre le système différentiel $\left\{\begin{array}{ccccccc} x' & = & x & + & 2y & + & te^t \\ y' & = & 8x & + & y & + & e^{-t} \end{array}\right.$

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{(x+n)\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $[0, +\infty[$.
3. Montrer que sa somme, notée f est continue sur $[0, +\infty[$. Montrer aussi qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On pourra pour cela prouver la minoration :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [n, +\infty[, \quad f(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
5. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 13

Déterminer $\inf \left\{ \displaystyle\int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \mathrm{d}t \ ; \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Exercice 14

Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!}$ quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 15

Soient P et Q deux polynômes réels non nuls. L'équation $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \mathrm{e}^x$ peut-elle avoir une infinité de solutions ?

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A la matrice de coefficients $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Prouver l'équivalence $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 0$.
2. En déduire que la matrice A est diagonalisable.
3. Calculer la somme des carrés des valeurs propres de A.

Exercice 17

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$.

1. À l'aide d'intégrales, montrer que v_n est équivalent à $n\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\ln\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}\right) - \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) = \dfrac{1}{n+1}\left(\ln(n+1) - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.
4. Démontrer la relation $v_n = n\ln(n) - n + \mathrm{o}(n)$.
5. Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Exercice 18

Pour tout entier n on note p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n. Nature de la série $\sum \left(10 - n^{\frac{1}{p_n}}\right)$?

Exercice 19

On note $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_n\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Préciser la dimension de F.

2. Pour tout entier $p \geq 3$ on note v_p le nombre de parties de $[[0,p]]$ telles que l'écart entre deux éléments quelconques d'une de ces parties soit supérieur ou égal à 3. Montrer que le suite $(v_{n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de F.

Exercice 20

1. Montrer qu'on définit bien une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par les relations : $\forall x \in [0,1]$, $u_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
3. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$. La fonction limite sera notée u.
4. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la fonction u n'est pas identiquement nulle.

Exercice 21

Soit $n \geqslant 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le polynôme caractéristique et préciser les éléments propres de A.

Exercice 22

Deux joueurs de foot tirent tour à tour un penalty. Le joueur 1 (resp. 2) marque avec une probabilité $p_1 \in]0,1[$, (resp. $p_2 \in]0,1[$). On s'arrête au premier penalty réussi.

1. Calculer la probabilité que le joueur 1 gagne.
2. Montrer que le jeu s'arrête de manière quasi certaine.
3. Pour quelles valeurs de p_1 peut-on obtenir un p_2 de telle sorte que le jeu soit équitable ?

Exercice 23

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$.

Exercice 24

Une secrétaire appelle n clients. Chaque client répond avec une probabilité de $p \in]0,1[$, indépendamment des autres.

On note X la v.a.r.d. correspondant au nombre de clients ayant répondu lors de cet appel.

Ensuite elle décide de rappeler ceux qui n'ont pas répondu, soit $n - X$ personnes, et on note Y le nombre de personnes ayant répondu lors de ce second appel - mêmes hypothèses sur les réponses.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer $P_{X=i}(Y = k)$.
3. Posons $Z = X + Y$. La variable Z suit-elle une loi binomiale, si oui avec quels paramètres ?

Exercice 25

Soit : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x\,\mathrm{d}t$

1. Donner le domaine de définition de f
2. Donner la limite de f en $+\infty$

Exercice 26

On note pour $n > 0, f_n : t \mapsto e^{\frac{n}{n-1}t}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme sur tout intervalle du type $]-\infty, b]$.
3. A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

Notes

[0] correction : Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve. On posera $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$.

[0] correction :

1. **• 2 points**
   A est symétrique réelle donc diagonalisable (dans une b.o.n. et à v.p. réelles).
2. **• 4 points**
   Calcul élémentaire de polynôme caractéristique en pensant à développer par rapport à la 2e colonne, puis de s.e.p. .
   RQ : directement Pour $V_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $V_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, on a $AV_1 = V_1$, $AV_2 = V_2$ et $AV_3 = \frac{1}{2}V_3$ donc $E_{\frac{1}{2}} = \mathrm{Vect}(V_3)$, et (V_1, V_2) étant libre, $E_1 = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$ et il ne peut y avoir d'autre valeur propre car $3 = \dim(E_{\frac{1}{2}}) + \dim(E_1)$.
3. **• 4 points**
   – on peut choisir P orthogonale (ou pas).
   Posons $P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale dont les colonnes sont des vecteurs propres, donc $P^T\ A\ P = Diag(1, 1, \frac{1}{2}) = \Delta$
   Pour $Z : t \mapsto P^T W(t)$, on a $Z' = \Delta Z$, donc Z est de la forme $t \mapsto Diag(\lambda e^t, \mu e^t, \nu e^{\frac{1}{2}t})$, puis $W : t \mapsto \lambda \frac{e^t}{\sqrt{2}} V_1 + \mu e^t V_2 + \frac{\nu}{\sqrt{2}} e^{\frac{t}{2}} V_3$
   – variante : on peut résoudre directement $x - 2' = x_2$ et en faisant $L_1 + L_3$ et $L_1 - L_3$ trouver $x_1 + x_3$ et $x_1 - x_3$.
4. **• 3 points**
   Il suffit de lire ... $B_{n+1} = AB_n$
5. **• 3 points**
   Par récurrence $\begin{pmatrix}\mathbf{P}(X_n = 0)\\ \mathbf{P}(X_n = 1)\\ \mathbf{P}(X_n = 2)\end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = A^n(\frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_3) = \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2^{n+1}}V_3$ tend vers V_1.