ch. VI : Fonctions intégrables

— **Condition suffisante de nullité** d'une fonction continue intégrable et d'intégrale nulle.
— **Norme** sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

- *Exemples du programme :* formules à connaître **[pour tous]** ; démonstrations : **[niveau ⋆]**

  Norme $\| \|_1 : f \longmapsto \int_I |f|$ sur $L^1(I,\mathbb{K})$.

  Norme infinie $\| \|_\infty^I$ sur l'espace $\mathcal{F}_b(I,\mathbb{K})$ des fonctions bornées sur I.

ch. VII : Probabilités discrètes, variables aléatoires

— Dénombrabilités, sommabilité d'une famille discrète. Propriétés sur les familles sommables : croissance, linéarité, sommation par paquets, Fubini, produits de sommes*pas d'exercice sur ces notions, méthodes et résultats admis du programme PC*

— Univers, évènement contraire, réunion dénombrable. Tribu des évènements, espace probabilisable.

— **Ecritures ensemblistes** dévènements à l'aide de $\bigcap$ (ET) ou à l'aide de $\bigcup$ (OU)

— Loi de **Probabilité** sur Ω muni d'une tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$: application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que :
i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
ii) pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$. ($\sigma$-additivité)

— **Continuité croissante** : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

— **Continuité décroissante** : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est 1 suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

— **Propriété de sous-additivité** : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

— Probabilité conditionnelle. **Indépendance de 2 évènements** ; famille d'évènements 2 à 2 indépendants, **mutuellement indépendants**.

— Formule $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$ **[preuve]**

— **Formule des probabilités composées** : si $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$, alors
$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2|A_1) \times \mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$

— **Système complet (dénombrable) d'évènements** si : $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_n$ et, $\forall i \neq j,\ \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$

— système quasi-complet.

— **Formule des probabilités totales** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, avec $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$, alors
$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(B|A_n)\ .$$

— **Formule de Bayes** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, et B un évènement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$ et $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$, alors
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \mathbf{P}_B(A_k) = \frac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\ \mathbf{P}(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\ \mathbf{P}(A_n)}.$$

preuve : [niveau ⋆]

— Variable aléatoire discrète X, loi $\mathbb{P}_X$.
Notations
$\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}[X = k] = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\})$

Variables aléatoires suivant une loi usuelle :
$\boxed{Unif(⟦1,N⟧),\ b(p),\ \mathcal{B}(N,p),\ \mathcal{G}(p),\ \mathcal{P}(\lambda)}$
les étudiants doivent connaître les images $X(\Omega)$ les valeurs de $\mathbf{P}(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et si possible une expérience aléatoire associée.

— Notation $X \sim Y$ lorsque X et Y ont même loi.

— Variable alétaoire image $Y = f(X)$ avec $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f : R \to \mathbb{R}$.
N.B. : les notions d'espérance, variance, etc n'ont pas encore été généralisées aux variables à valeurs dans un ensemble infini dénombrable

à venir : réduction

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[pour tous]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques points **[niveau ⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[niveau ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin et Titouan, T7 Clémentine