Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. VIII : Réduction

— Rappels : sous-espaces stables d'un endomorphisme ; droite stable

— **vecteur propre**, **valeur propre**, **spectre**, **sous-espaces propres** d'un endomorphisme ou d'une matrice ;
Les étudiants doivent pouvoir, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, faire le lien entre l'inversibilité ou non de $\lambda \mathrm{id}_E - u$ et le fait que λ n'est pas ou est une valeur propre.

— **λ valeur propre de u si et seulement si** $\det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0$
recherche des valeurs propres via la factorisation de $\det(x\mathrm{id}_E - u)$ ou $\det(xI_n - A)$

— **Détermination explicites de sous-espaces propres** via des résolutions de systèmes.

— **Polynôme caractéristique** χ_u (unitaire) d'un endomorphisme u, via sa matrice A dans une base :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K},\ \chi_A(x) = \det(xI_n - A)}$$

$$\boxed{\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}$$

— Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. **[preuve ⋆]**

— **multiplicité d'une valeur propre**

— Lorsque χ_A est **scindé** sur $\mathbb{K}$:

$$\boxed{\chi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda}}$$

$$\boxed{n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda},\ \boxed{\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \lambda^{m_\lambda}},$$

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda \times \lambda}$$

— Si P est un polynôme annulateur de u et λ une valeur propre de u, alors $P(\lambda) = 0$ **[preuve ⋆]**

— Théorème de Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristique est annulateur.

— Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2 est libre. **[preuve ⋆]**

— **Les sous-espaces propres d'un endomorphismes sont en somme directe.** **[preuve ⋆]**

— **Diagonalisabilité** d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme.

— Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, $\boxed{1 \leq \dim(E_{\lambda,u}) \leq m_\lambda}$ **[preuve ⋆]**

les étudiants doivent connaître un exemple de mattrice non diagonalisable tel
$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Application : **Calcul des puissances** d'une matrice diagonalisable
N.B. pour les colleurs : le programme ne mentionne pas explicitement les suites récurrentes linéaires ou les systèmes différentielles, tout exercice doit être guidé

— **Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité** pour un polynôme caractéristique scindé. Sont équivalentes :
i) A diagonalisable sur $\mathbb{K}$
ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} E_{\lambda,u}$,
iii) χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u), \dim(E_{\lambda,u}) = m_\lambda}$.

— **Théorème de C.S. de diagonalisabilité** lorsque le polynôme caractéristique est scindé à racines simples :

— **Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité via un polynôme annulateur**
Sont équivalentes :
i) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$
ii) il existe un polynôme annulateur P de A **scindé et à racines simples**
iii) $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \lambda)$ est annulateur de A.

à venir : fonctions intégrables

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

T1 : Clémence
T3 : Ollie (Mathéïs)
T4 : Marie
T5 : Arthus, Volodymyr
T7 : Enora, Camille G.