Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

ch. VI :Réduction

— Rappels : sous-espaces stables d'un endomorphisme ; droite stable

— **vecteur propre**, **valeur propre**, **spectre**, **sous-espaces propres** d'un endomorphisme

— **Polynôme caractéristique** χ_u (unitaire) d'un endomorphisme u, via sa matrice A dans une base :
$\boxed{\chi_A(x) = \det(xI_n - A)}$
$\boxed{= x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}$
$\boxed{\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}$

— Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

— **multiplicité d'une valeur propre**

— Lorsque χ_A est **scindé** sur $\mathbb{K}$:
$\boxed{\chi_A(x) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (x-\lambda)^{m_\lambda}}$
$\boxed{n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} m_\lambda}$, $\boxed{\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda^{m_\lambda}}$,
$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} m_\lambda \times \lambda}$

— Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2 est libre. **[preuve ⋆]**

— **Les sous-espaces propres d'un endomorphismes sont en somme directe.** **[preuve ⋆]**

— **Diagonalisabilité** d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme.
Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité pour un polynôme caractéristique scindé : lorsque $E = \bigoplus E_{\lambda,u}$, ou lorsque $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u), \dim(E_{\lambda,u}) = m_\lambda$.

— **C.S. de diagonalisabilité** (lorsque le polynôme caractéristique est scindé à racines simples)

— **Calcul des puissances** d'une matrice diagonalisable, d'une matrice trigonalisable

— **Trigonalisabilité**, Théorème de C.N.S. de trigonalisabilité : lorsque le polynôme caractéristique est scindé *preuve non exigible* en particulier, toute matrice carrée est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.
programme PC : « La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication. »

— Systèmes de suites récurrentes linéaires à coefficients constants, cas diagonalisable

— Suites récurrentes linéaires à coefficients constants d'ordre quelconque : $u_{n+\ell} = a_{\ell-1}u_{n+\ell-1} + \cdots + a_0 u_n$
Les étudiants doivent savoir expliciter sur un exemple une écriture matricielle $V_{n+1} = AV_n$ avec $V_n = \begin{pmatrix} u_n \vdots u_{n+\ell-1}\end{pmatrix}$ de la relation de récurrence.
Dans le cas de valeurs propres 2 à 2 distinctes pour la matrice (compagnon) associée à la relation de récurrence, la suite est une combinaison linéaire des puissances des valeurs propres : $\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell);\ \forall p \in \mathbb{N},\ u_p = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \lambda_i^p$

— Rappels et compléments sur les récurrences linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, vues en PCSI

Exemples à connaître :

$A = \begin{pmatrix} 0 & -11 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, pas sur $\mathbb{R}$.

$T = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisale sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, mais son polynôme caractéristique $\chi_T = (X-1)^2$ est scindé.

ch. XI : Equations différentielles, systèmes différentiels

— **Equation différentielle linéaire d'ordre 1** à coefficients constants, avec second membre continu : $y' = a\ y + b(t)$ (rappel de PCSI)

— **Equation différentielle linéaire d'ordre 1** avec second membre, à coefficients continus : $y' = a(t)\ y + b(t)$ (rappel de PCSI)
Pour $a : I \to \mathbb{K}$ continue, détermination des solutions sur I de $(H) \quad y' = a(t)y$ **[preuve]**

— **Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants** $ay'' + by' + cy = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$

— **Système différentiel linéaire** à coefficients constants, sans second membre : $X'(t) = A\ X(t)$
Résolution dans le **cas diagonal** $Z' = D\ Z$, puis dans le **cas diagonalisable**, en posant $A = PDP^{-1}$ et $Z = P^{-1}X$
Ecriture des solutions réelles à l'aide des parties réelles et imaginaires des solutions complexes.

à venir la semaine suivante :; systèmes linéaires d'équations différentielles de la forme $X' = A(t)X + B(t)$, théorème de Cauchy-Lipschitz, structure de l'ensemble des solutions.