

Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques [preuves] signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques [preuves*] signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

chap. VII : Réduction

- Rappels : sous-espaces stables d'un endomorphisme ; droite stable
- vecteur propre, valeur propre, spectre, sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice ;

Les étudiants doivent pouvoir, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, faire le lien entre l'inversibilité ou non de $\lambda \text{id}_E - u$ et le fait que λ n'est pas ou est une valeur propre.

- λ valeur propre de u si et seulement si $\det(\lambda \text{id}_E - u) = 0$, recherche des valeurs propres via la factorisation de $\det(x \text{id}_E - u)$ ou $\det(xI_n - A)$
- Détermination explicites de sous-espaces propres via des résolutions de systèmes.
- **Polynôme caractéristique** χ_u (unitaire) d'un endomorphisme u , via sa matrice A dans une base :

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$$

$$= x^n - \text{tr}(A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

$$\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. [preuve *]

- multiplicité d'une valeur propre

- Lorsque χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$:

$$\chi_A(x) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (x - \lambda)^{m_\lambda}$$

$$n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda, \quad \det(A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \lambda^{m_\lambda},$$

$$\text{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda \times \lambda$$

- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2 est libre. [preuve *]
- Les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe. [preuve]

- Diagonalisabilité d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme.

- Pour $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, inégalités $1 \leq \dim(E_{\lambda,u}) \leq m_\lambda$

[preuve pour les 5/2]

- Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité pour un polynôme caractéristique scindé :
lorsque $E = \bigoplus E_{\lambda,u}$,
lorsque $\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u), \dim(E_{\lambda,u}) = m_\lambda$.

- C.S. de diagonalisabilité lorsque le polynôme caractéristique est scindé à racines simples

les étudiants doivent connaître un contre-exemple tel

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

- Trigonalisabilité,
Théorème de C.N.S. de trigonalisabilité : lorsque le polynôme caractéristique est scindé
preuve non exigible
en particulier, toute matrice carrée est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

programme PC : « La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication. »

- Systèmes de suites récurrentes linéaires à coefficients constants, cas diagonalisable

$$V_n = \begin{pmatrix} v_{n,1} \\ \vdots \\ v_{n,p} \end{pmatrix} \text{ et relation } V_{n+1} = A \times V_n$$

les étudiants doivent savoir en déduire une formule de la forme $V_n = PD^n P^{-1} V_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, avec D diagonale, lorsque $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est diagonalisable.

- Suites récurrentes linéaires à coefficients constants d'ordre quelconque : $u_{n+\ell} = a_{\ell-1}u_{n+\ell-1} + \dots + a_0 u_n$

Les étudiants doivent savoir expliciter sur un exemple une écriture matricielle $V_{n+1} = AV_n$ avec $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+\ell-1} \end{pmatrix}$ de la relation de récurrence.