Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.
• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. VI : Equations différentielles, systèmes différentiels

— **Ecriture des solutions réelles** d'uns système différentiel $X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
— Système différentiel linéaire (à coefficients continus) : $X' = A(t)X + B(t)$
— Problème de Cauchy

$$\boxed{(\mathcal{PC}) \begin{cases} X'(t) = A(t)\, X(t) + B(t) & (\mathcal{E}) \\ X(t_0) = X_0 & (\mathcal{CI}) \end{cases}}$$

— Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (admis, preuve H.P.) : existence d'une unique solution d'un problème de Cauchy linéaire du type (PC) lorsque les applications A et B sont continues.

Principe de superposition.

— Résolution explicite d'un problème de Cauchy avec A constante et $B(t) = 0$: écriture de l'unique solution dans le cas linéaire diagonal, ou dans le cas **diagonalisable**.

— Cas de Système différentiel linéaire trigonalisable à coefficients constants $X' = AX$, avec A trigonalisable (sans second membre).

— Structure de l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients continus, de la forme : $(E) \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = d(t)$, avec a, b, c, d continues sur I et $a(t) \neq 0,\ \forall t \in I$
Structure de $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 2 de l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients continus, de la forme :

$$(E) \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = 0$$

avec a, b, c continues sur I et $a(t) \neq 0,\ \forall t \in I$

(N.B. pour les colleurs : la méthode de Lagrange pour en déterminer explicitement une base est Hors Programme)

ch. VII : Espaces probabilisés, variables aléatoires.

— Ensemble fini, ensemble dénombrable (infini), s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ vers cet ensemble. Ex : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$.
— Complémentaire, union, intersection de parties de Ω.
Tribu $\mathcal{A}$ sur un ensemble dénombrable Ω (fini ou infini) : ensemble contenant Ω, stable par passage au complémentaire et par réunion infinie. Évènement d'une tribu.
Evènements incompatibles : si l'intersection est vide.
— **Probabilité** sur Ω muni d'une tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$: application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ telle que :
i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
ii) pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ d'événements incompatibles, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$.
— Formule $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$ **[preuve pour les 5/2]**

— **loi uniforme** sur $[\![1, N]\!]$, **loi de Bernoulli** $b(p)$ de paramètre p, **loi binomiale** $\mathcal{B}(N, p)$, **loi géométrique** $\mathcal{G}(p)$ de paramètre p ; expériences aléatoires associées.
— **loi de Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ
— Probabilité conditionnelle. **Indépendance de 2 évènements** famille d'évènements 2 à 2 indépendants, **mutuellement indépendants**.
— **Formule des probabilités composées** **[preuve]** :
si $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$, alors
$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$
— **Système complet (dénombrable) d'évènements**
si : $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_n$ et, $\forall i \neq j,\ \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$
— **Formule des probabilités totales** **[preuve⋆]**
Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, avec $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$,
alors $\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\, \mathbf{P}(A_n)$.

à venir : Formule de Bayes. Continuité croissante et décroissante. Variables aléatoires.
Attention pas de colles en PC la semaine du 14 au 18 décembre !