ch. VIII : Réduction

- Eléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme.
- Rappels : sous-espaces stables d'un endomorphisme ; droite stable
- **vecteur propre**, **valeur propre**, **spectre**, **sous-espaces propres** d'un endomorphisme ou d'une matrice ;
  Les étudiants doivent pouvoir, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, faire le lien entre l'inversibilité ou non de $\lambda \mathrm{id}_E - u$ et le fait que λ n'est pas ou est une valeur propre.
- λ valeur propre de u si et seulement si $\det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0$, recherche des valeurs propres via la factorisation de $\det(x\mathrm{id}_E - u)$ ou $\det(xI_n - A)$
- Si P est un polynôme annulateur de u et λ une valeur propre de u, alors $P(\lambda) = 0$ **[preuve ⋆]**
- **Détermination explicites de sous-espaces propres** via des résolutions de systèmes.
- **Polynôme caractéristique** χ_u (unitaire) d'un endomorphisme u, via sa matrice A dans une base :

$$\boxed{\chi_A(x) = \det(xI_n - A)}$$
$$\boxed{\quad = x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}$$

$$\boxed{\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)}$$

- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. **[preuve ⋆]**
- **multiplicité d'une valeur propre**
- Lorsque χ_A est **scindé** sur $\mathbb{K}$:

$$\boxed{\chi_A(x) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (x-\lambda)^{m_\lambda}}$$

$$\boxed{n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda}, \quad \boxed{\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \lambda^{m_\lambda}},$$

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda \times \lambda}$$

- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2 est libre. **[preuve ⋆]**
- **Les sous-espaces propres d'un endomorphismes sont en somme directe.** **[preuve ⋆]**

  [preuve]
- **Diagonalisabilité** d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme.
- Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, inégalités $\boxed{1 \leq \dim(E_{\lambda,u}) \leq m_\lambda}$ **[preuve ⋆]**
- **Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité** pour un polynôme caractéristique scindé :
  lorsque $E = \bigoplus E_{\lambda,u}$,
  lorsque $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u), \dim(E_{\lambda,u}) = m_\lambda$.

à venir : Condition suffisante de diagonalisabilité. Trigonalisation ; Lien avec les polynômes annulateurs. Applications.

ch. VII : Probabilités discrètes, variables aléatoires

- Probabilité conditionnelle. **Indépendance de 2 évènements** ; famille d'évènements 2 à 2 indépendants, **mutuellement indépendants**.
- Formule $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$ **[preuve]**
- $\boxed{\textbf{Formule des probabilités composées}}$: si $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$, alors
  $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2|A_1) \times \mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$
- **Système complet (dénombrable) d'évènements**
  si : $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_n$ et, $\forall i \neq j,\ \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$
- système quasi-complet.
- $\boxed{\textbf{Formule des probabilités totales}}$ Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, avec $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$, alors

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(B|A_n)\ .$$

- $\boxed{\textbf{Formule de Bayes}}$ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, et B un évènement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$ et $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}_B(A_k) = \frac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\,\mathbf{P}(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\,\mathbf{P}(A_n)}.$$

  preuve : [niveau ⋆]
- Variable aléatoire discrète X, loi $\mathbb{P}_X$.
  Notations
  $\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}[X = k] = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\})$

Variables aléatoires suivant une loi usuelle :

$\boxed{Unif(\llbracket 1, N \rrbracket),\ b(p),\ \mathcal{B}(N,p),\ \mathcal{G}(p),\ \mathcal{P}(\lambda)}$

les étudiants doivent connaître les images $X(\Omega)$ les valeurs de $\mathbf{P}(X=k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et si possible une expérience aléatoire associée.

— Notation $X \sim Y$ lorsque X et Y ont même loi.

— Variable alétaoire image $Y = f(X)$ avec $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f : R \to \mathbb{R}$.
N.B. : les notions d'espérance, variance, etc n'ont pas encore été généralisées aux variables à valeurs dans un ensemble infini dénombrable

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[pour tous]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques points **[niveau ⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[niveau ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin et Titouan, T7 Clémentine