Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une $\boxed{\text{formule}}$ encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. VIII : Réduction

— Eléments propres d'une matrice ou d'un endomorphisme, polynôme caractéristique, utilisation de polynômes annulateurs.

— Théorème de Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristique est annulateur.

— Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2 est libre. **[preuve ⋆]**

— **Les sous-espaces propres d'un endomorphismes sont en somme directe.** **[preuve ⋆]**

— **Diagonalisabilité** d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme.

— Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, $\boxed{1 \leq \dim(E_{\lambda,u}) \leq m_\lambda}$ **[preuve ⋆]**

les étudiants doivent connaître un exemple de mattrice non diagonalisable tel
$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Application : **Calcul des puissances** d'une matrice diagonalisable
N.B. pour les colleurs : le programme ne mentionne pas explicitement les suites récurrentes linéaires ou les systèmes différentielles, tout exercice doit être guidé

— **Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité** pour un polynôme caractéristique scindé. Sont équivalentes :
i) A diagonalisable sur $\mathbb{K}$
ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} E_{\lambda,u}$,
iii) χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u), \dim(E_{\lambda,u}) = m_\lambda}$.

— **Théorème de C.S. de diagonalisabilité** lorsque le polynôme caractéristique est scindé à racines simples :

— **Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité via un polynôme annulateur**
Sont équivalentes :
i) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$
ii) il existe un polynôme annulateur P de A **scindé et à racines simples**
iii) $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \lambda)$ est annulateur de A.

— **Trigonalisabilité**,
Théorème de C.N.S. de trigonalisabilité : lorsque le polynôme caractéristique est scindé
preuve non exigible
en particulier, toute matrice carrée est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

programme PC : « La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication. »

— **Systèmes de suites récurrentes linéaires** à coefficients constants, cas diagonalisable
$V_n = \begin{pmatrix} v_{n,1} \\ \vdots \\ v_{n,p} \end{pmatrix}$ et relation $V_{n+1} = A \times V_n$
les étudiants doivent savoir en déduire une formule de la forme $V_n = PD^nP^{-1}V_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *avec* D *diagonale, lorsque* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *est diagonalisable.*

— Suites récurrentes linéaires à coefficients constants d'ordre quelconque : $u_{n+\ell} = a_{\ell-1}u_{n+\ell-1} + \cdots + a_0u_n$
Les étudiants peuvent avoir à expliciter sur un exemple une écriture matricielle $V_{n+1} = AV_n$ *avec* $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+\ell-1} \end{pmatrix}$ *de la relation de récurrence.*

ch. VI : Probabilités discrètes, variables aléatoires

— Dénombrabilités, sommabilité d'une famille discrète. Propriétés sur les familles sommables : croissance, linéarité, sommation par paquets, Fubini, produits de sommes*pas d'exercice sur ces notions, méthodes et résultats admis du programme PC*

— Univers, évènement contraire, réunion dénombrable. Tribu des évènements, espace probabilisable.

— **Ecritures ensemblistes** dévènements à l'aide de $\bigcap$ (ET) ou à l'aide de $\bigcup$ (OU)

— Loi de **Probabilité** sur Ω muni d'une tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$: application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ telle que :
i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$; ii) pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ d'événements incompatibles, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$. ($\sigma$-additivité)

— **Continuité croissante** : si $(A_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$, alors $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

— **Continuité décroissante** : si $(A_n)_{n \geqslant 0}$ est 1 suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$, alors $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

— **Propriété de sous-additivité** : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

— Probabilité conditionnelle. **Indépendance de 2 évènements** ; famille d'évènements 2 à 2 indépendants, **mutuellement in-**

dépendants.

— Formule $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$

— **Formule des probabilités composées** $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$, alors
$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$

— **Système complet (dénombrable) d'évènements** si : $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_n$ et, $\forall i \neq j,\ \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$
système quasi-complet.

— **Formule des probabilités totales** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, avec $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$, alors $\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\, \mathbf{P}(A_n)$.

— **Formule de Bayes** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, et B un évènement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$ et $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbf{P}_B(A_k) = \dfrac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\, \mathbf{P}(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\, \mathbf{P}(A_n)}$.

à venir : variables aléatoires

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

T1 : Clémence
T3 : Ollie (Mathéïs)
T4 : Marie
T5 : Arthus, Volodymyr
T7 : Enora, Camille G.